

به نام خدا



دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوراسگان
گروه عمران

تحلیل سازه ۲

تحلیل ماتریس سازه ها

۱: فلسفه پیدایش تحلیل ماتریسی سازه ها

با وجود اینکه مفاهیم جبر ماتریسی به عنوان ابزار استاندارد تحلیل در ریاضیات کاربردی در سال های قبل از ۱۹۴۰ ارائه شده بودند و از این مفاهیم در حل مسائل مربوط به سازه ها استفاده شده بود، ولی به علت عدم وجود کامپیوتر در آن زمان، این عمل از طرف مهندسين به دلیل حجم بالای عملیات ماتریسی کمتر مورد استقبال قرار گرفت. اما با پیدایش کامپیوتر، معیارهای قضاوت درباره «خوب» یا «بد» بودن یک روش تحلیلی تغییر یافت. در مواجهه با یک روش تحلیلی، دیگر سؤال این نبود که «آیا این روش حجم عملیات عددی را به حداقل می رساند یا نه؟»، بلکه مسأله به این صورت در ذهن ها شکل گرفت که «آیا می توان این روش را به سادگی به صورت یک برنامه کامپیوتری تنظیم کرد یا نه؟» و بدین ترتیب با توجه به اینکه روش های مبتنی بر جبر ماتریسی از این نظر در حد ایده ال هستند، استفاده از روش های تحلیل ماتریسی مورد استقبال قرار گرفت.

لذا موجودیت یافتن روش های تحلیل ماتریسی سازه ها مدیون دو عامل مهم می باشد که در طی دهه ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ میلادی به وقوع پیوستند:

الف) نیاز روزافزون به تحلیل دقیق و مطلوب سازه های مهندسی پیچیده با درجه نامعینی بالا که در بسیاری از زمینه های به حدی پیچیده بودند که استفاده از روش های دستی امکان پذیر نبود.

ب) پیدایش کامپیوترهای دیجیتالی (۱۹۴۶)

۲: فرض های اصلی در تحلیل ماتریسی سازه ها

الف) تئوری تغییر شکل های کوچک: فرض می شود که تحت اثر بارهای وارده هندسه یک سازه به مقدار قابل ملاحظه ای تغییر شکل نمی دهد.

ب) رفتار خطی مصالح: فرض مذکور بیانگر این واقعیت است که در هیچ کدام از مقاطع سازه، تنش و یا کرنش نباید از مقادیر مربوط به نقطه تسلیم این مصالح فزونی یابد.

* بر مبنای دو فرض “تغییر شکل های کوچک و رفتار خطی مصالح” اصلی پدید می آید که به آن اصل جمع آثار قوا (principle of superposition) اطلاق می شود. اصل مذکور بیانگر آن است که پاسخ یک سازه به مجموعه ای از بارهای وارده، مستقل از ترتیب اعمال آن بارها است، به عبارت دیگر ترتیب اثر بارها، نتایج نهایی را تغییر نمی دهد.

۳: اصول اساسی در تحلیل ماتریسی سازه ها

الف) اصل تعادل: عامل مهمی که در استخراج معادلات حاکم بر رفتار سازه تأثیر به سزایی دارد، اصل تعادل است (تعادل استاتیکی). در تحلیل ماتریسی اصل تعادل در سه رده (یا سطح) مطرح می شود:

- ۱- تعادل سازه (Equilibrium of structure)
- ۲- تعادل گره (Equilibrium of Node)
- ۳- تعادل عضو (Equilibrium of Member)

ب) اصل سازگاری: عامل مهم دیگری که در استخراج معادلات حاکم بر رفتار سازه تأثیر به سزایی دارد، اصل سازگاری است. براساس این اصل، تغییر شکل ها و در نتیجه تغییر مکان ها در هر نقطه سازه پیوسته بوده و منحصر به فرد است. در واقع کلیه اعضای متصل به یک گره قبل از بارگذاری، بعد از تغییر شکل سازه تحت اثر بار وارده نیز به همان گره متصل باقی می ماند.

۳: روش های تحلیل ماتریسی سازه ها

در تحلیل یک سازه، باید شرایط تعادل و شرایط سازگاری ارضا گردند. برای ارضای این شرایط می توان از روابط اساسی (بنیادی) مکانیک یا روشهای انرژی استفاده کرد.

با توجه به ترتیب ارضای این شرایط، تحلیل ماتریسی به دو روش نرمی و سختی صورت می گیرد.

الف) روش نرمی: در صورتی که برای تحلیل یک سازه ابتدا واکنش های اضافی به صورت مجهولاتی انتخاب شوند و سپس به کمک معادلات تعادل، سایر واکنش ها تعیین گردند و در آخر برای تعیین واکنش های اضافی، شرایط سازگاری تغییرشکل ها اعمال شوند، معادلاتی به دست خواهد آمد که مجهولات آنها واکنش های اضافی و ضرایب آنها ضرایب نرمی سازه می باشند. این روش، روش نرمی (Flexibility Method) یا روش نیرو (Force Method) نامیده می شود.

به طوری کلی در روش نرمی مطابق رابطه زیر، مجهولات اصلی نیروهای اعضا می باشند:

$$[f_{ij}] \{F\} = \{D\}$$

در این رابطه $[f_{ij}]$ ماتریس نرمی سازه می باشد.

ضریب نرمی f_{ij} بیانگر تغییرمکان در درجه آزادی i به علت بار واحد در درجه آزادی j می باشد.

(ب) روش سختی: در صورتی که برای تحلیل یک سازه، تغییرمکان های سازگار (شامل انتقال ها و دوران ها) به عنوان مجهول انتخاب شوند، و سپس شرایط تعادل نیروها در گره های سازه برقرار گردند، معادلاتی به دست خواهد آمد که مجهولات آنها تغییرمکان ها و ضرایب آنها، ضرایب سختی سازه می باشند. این روش تحلیل ماتریسی سازه، روش سختی (Stiffness Method) یا روش تغییر مکان (Displacement Method) نامیده می شود.

به طوری کلی در روش سختی مطابق رابطه زیر، مجهولات اصلی جابجایی های گره ای می باشند:

$$[K_{ij}]\{D\} = \{F\}$$

در این رابطه $[K_{ij}]$ ماتریس نرمی سازه می باشد.

ضریب سختی K_{ij} بیانگر نیرو در درجه آزادی i به علت تغییرمکان واحد در درجه آزادی j می باشد.

✓ در هر دو روش شرایط سازگاری و شرایط تعادل ارضا می شوند، لیکن ترتیب آنها در دو روش متفاوت است.

✓ در روش سختی ابتدا تعادل ارضاء می شود و سپس شرط سازگاری ارضا می گردد. از این رو نتایج اولیه روش سختی، تغییر مکان های گره ای می باشد (در واقع گاهی به روش سختی، روش تعادل (Equilibrium Method) نیز اطلاق می شود).

✓ در روش نرمی ابتدا سازگاری و سپس تعادل ارضاء می گردد. از این رو نتایج اولیه روش نرمی نیروهای اعضاء می باشند (در واقع گاهی به روش نرمی، روش سازگاری (Compatibility Method) نیز اطلاق می شود).

✓ در نهایت هر دو روش مذکور منجر به حل معادلاتی می گردد. در روش سختی (یا روش تغییر مکان ها) مجهولات شامل تغییر مکان های گره ها و در روش نرمی (یا در روش نیروها) مجهولات شامل نیروهای عضوی سازه هستند.

✓ در روش نرمی تعداد معادلات برابر درجه نامعینی سازه است.

✓ در روش سختی تعداد معادلات برابر تعداد درجات آزادی کل گره های سازه می باشد.

با توجه به این که:

- (۱) در روش سختی مرزی بین سازه معین یا نامعین نیست،
- (۲) در روش سختی نظیر روش نرمی الزامی به انتخاب مجهولات اضافی نیست،
- (۳) روش سختی به صورت سیستماتیک تر انجام می گیرد،
- (۴) روش سختی از نظر برنامه نویسی کامپیوتری ساده تر و بهتر است،
- (۵) روش سختی دید کامل تری از رفتار سازه را به معرض نمایش می گذارد.

از این رو مباحث تحلیل ماتریسی سازه ها (در این درس) بر مبنای روش سختی (Stiffness method) یا روش تعادل (Equilibrium method) یا روش تغییر مکان (Displacement method) متمرکز خواهد شد.

گره: (Node یا joint): گره محل برخورد دو یا چند عضو از سازه می باشد. در تحلیل ماتریسی سازه ها باید گره ها را شماره گذاری کرد، از این رو به هر گره یک شماره که درون یک دایره نوشته شده است، اختصاص داده می شود.

عضو یا المان: (Element یا Member): جزء سازه ای بین دو گره را المان یا عضو گویند. در تحلیل ماتریسی سازه ها هر المان یا عضو با یک شماره درون یک مربع نشان داده می شود.

درجه آزادی: (Degree of Freedom): درجه آزادی یک سازه در واقع بیانگر تعداد مولفه های مستقل تغییرمکانی (انتقال و چرخش) لازم برای توصیف حرکت و یا تغییرشکل سازه می باشد. به عنوان مثال هر گره خریا چون امکان حرکت در هر دو جهت کلی x و y را دارد، بنابراین هر گره خریا دو درجه آزادی دارد.

درجه آزادی کل سازه از جمع درجات آزادی گره های آن سازه به دست می آید.

تعاریف اولیه

چون بارهای و جابجایی ها کمیتهای برداری هستند، ایجاد یک دستگاه مختصات به منظور مشخص کردن جهت درست آنها ضروری است. در اینجا از دو نوع مختلف دستگاه مختصات استفاده می شود.

دستگاه مختصات عضو یا محلی (local or member coordinate system): دستگاه مختصات محلی یا عضو، دستگاهی است که در آن رفتار المان شرح داده می شود و معمولاً به نحوی است که یک محور آن در امتداد عضو و محور دیگر آن عمود بر محور مرکزی عضو می باشد. از این دستگاه برای مشخص کردن جهت جابجایی ها و بارگذاری های داخلی عضو استفاده می شود. برای نشان دادن مختصات محلی از x' و y' استفاده می شود.

دستگاه مختصات سازه یا کلی (global or structure coordinate system): دستگاه مختصات سازه یا کلی، دستگاهی است که در آن رفتار کل سازه تشریح می شود. از این دستگاه برای مشخص کردن جهت جابجایی ها و بارگذاری های خارجی در گره ها استفاده می شود. برای نشان دادن مختصات کلی از x و y استفاده می شود.



چون بارهای و جابجایی ها کمیتهای برداری هستند، ایجاد یک دستگاه مختصات به منظور مشخص کردن جهت درست آنها ضروری است. در اینجا از دو نوع مختلف دستگاه مختصات استفاده می شود.

دستگاه مختصات عضو یا محلی (local or member coordinate system): دستگاه مختصات محلی یا عضو، دستگاهی است که در آن رفتار المان شرح داده می شود و معمولاً به نحوی است که یک محور آن در امتداد عضو و محور دیگر آن عمود بر محور مرکزی عضو می باشد. از این دستگاه برای مشخص کردن جهت جابجایی ها و بارگذاری های داخلی عضو استفاده می شود. برای نشان دادن مختصات محلی از x' و y' استفاده می شود.

دستگاه مختصات سازه یا کلی (global or structure coordinate system): دستگاه مختصات سازه یا کلی، دستگاهی است که در آن رفتار کل سازه تشریح می شود. از این دستگاه برای مشخص کردن جهت جابجایی ها و بارگذاری های خارجی در گره ها استفاده می شود. برای نشان دادن مختصات کلی از x و y استفاده می شود.

تحلیل خرپای دو بعدی

فرمول بندی خصوصیات ماتریسی المان یا عضو خرپا بر اساس مفروضات زیر صورت می گیرد:

۱- عضو از لحاظ هندسی کاملاً مستقیم است.

۲- مصالح تابع قانون هوک می باشند.

۳- نیروها فقط به انتهای عضو وارد می شوند.

۴- بدلیل ماهیت نوع اتصال المان به دیگر المانها، المان میله فقط نیروی محوری را تحمل می کند و نیرو-های خمشی، پیچشی و برشی در آن ایجاد نمی شوند.

تحلیل خرپای دو بعدی

نماد گذاری استفاده شده برای تحلیل خرپای دو بعدی و جهت مثبت قراردادی

d_N تغییر مکان در انتهای نزدیک در دستگاه مختصات محلی

d_F تغییر مکان در انتهای دور در دستگاه مختصات محلی

q_N نیرو در انتهای نزدیک در دستگاه مختصات محلی

q_F نیرو در انتهای دور در دستگاه مختصات محلی

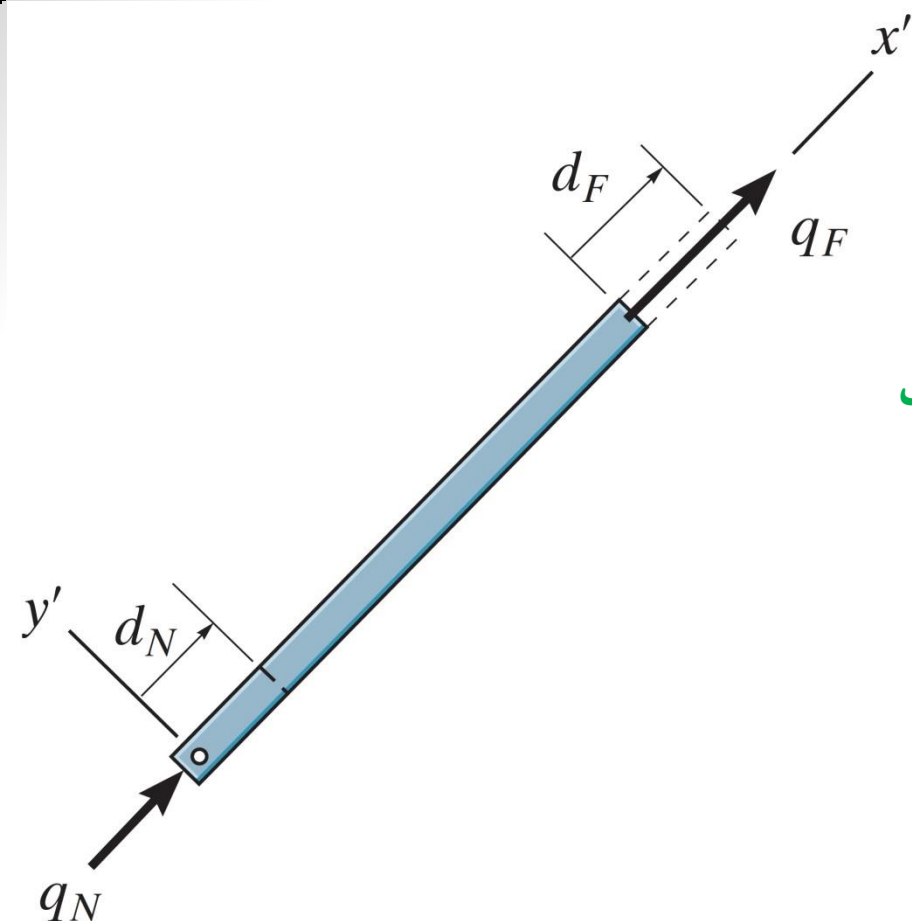
Q_i نیرو درجه آزادی i در دستگاه مختصات کل

D_i جابجایی درجه آزادی i در دستگاه مختصات کل

k' ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات محلی

k ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات کل

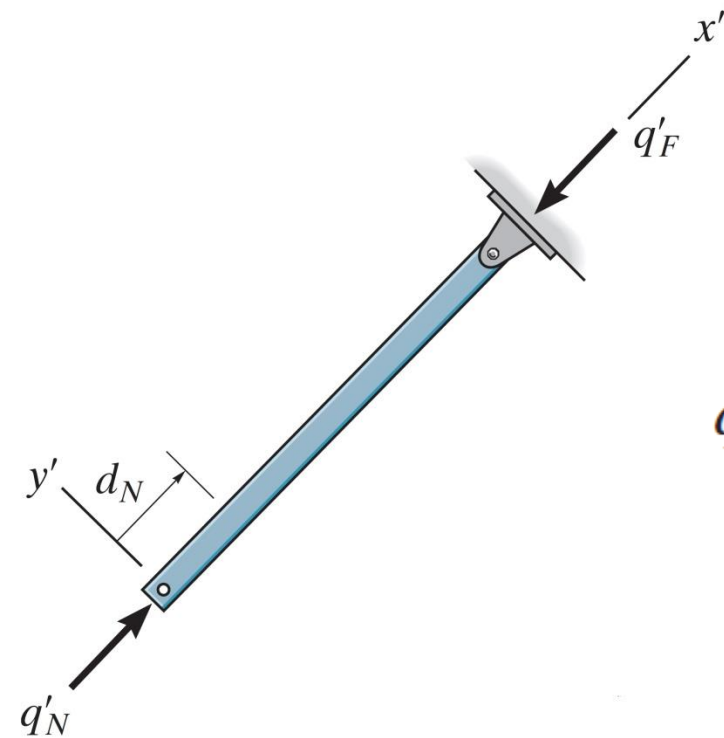
K ماتریس سختی کل سازه



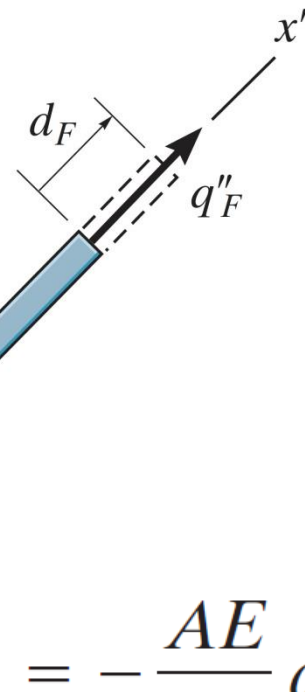
تحلیل خرابای دو بعدی

استخراج ماتریس سختی عضو خراب در دستگاه مختصات محلی

$$q'_N = \frac{AE}{L} d_N \quad q'_F = -\frac{AE}{L} d_N$$



$$q''_N = -\frac{AE}{L} d_F \quad q''_F = \frac{AE}{L} d_F$$



تحلیل خربای دو بعدی

استخراج ماتریس سختی عضو خربا در دستگاه مختصات محلی

$$q_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F$$

$$q_F = -\frac{AE}{L} d_N + \frac{AE}{L} d_F$$

در فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix}$$

در فرم خلاصه شده

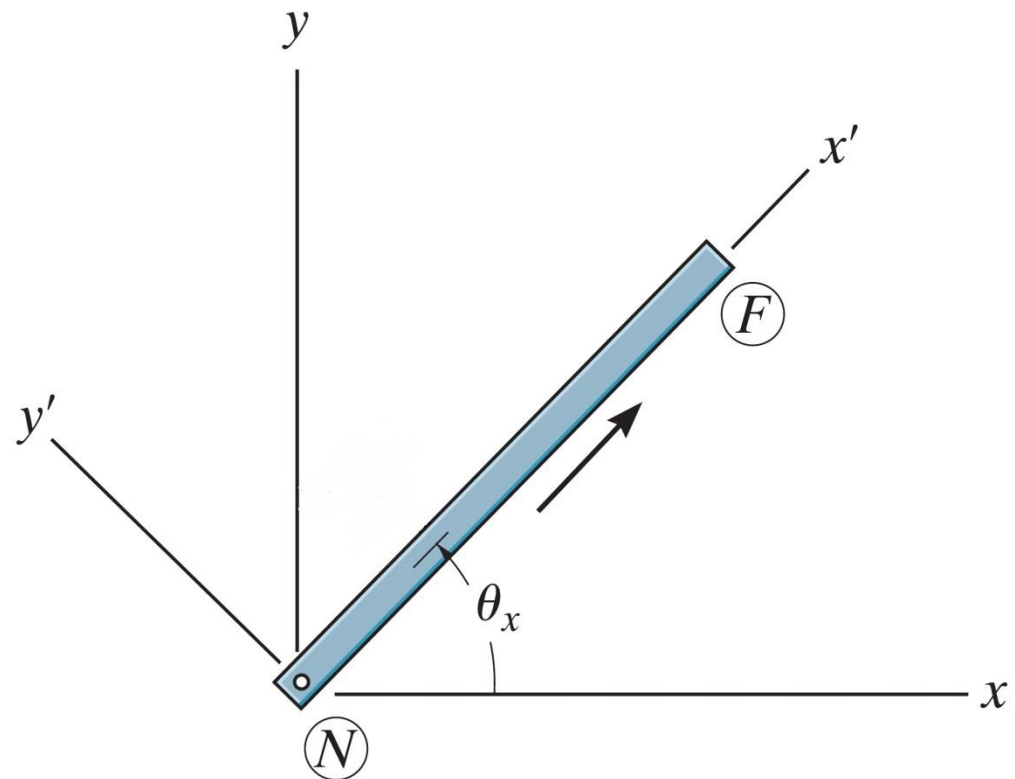
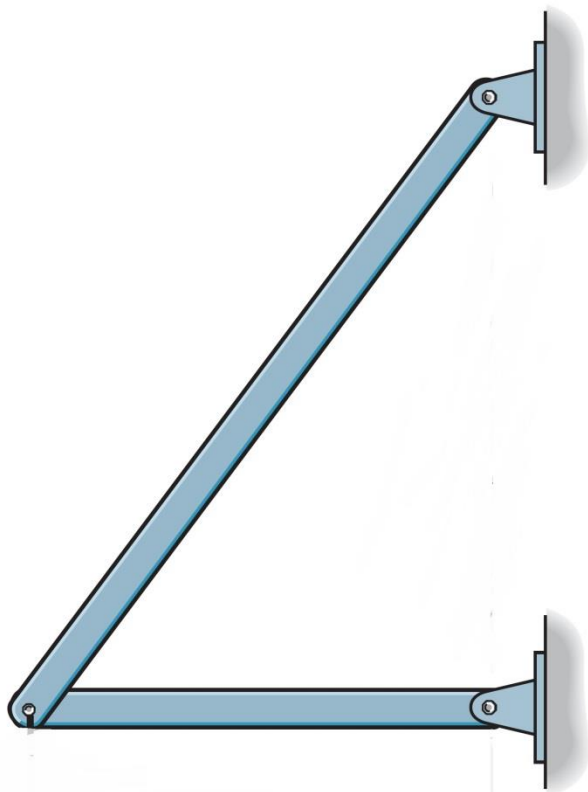
$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d}$$

ماتریس سختی عضو خربا در مختصات محلی

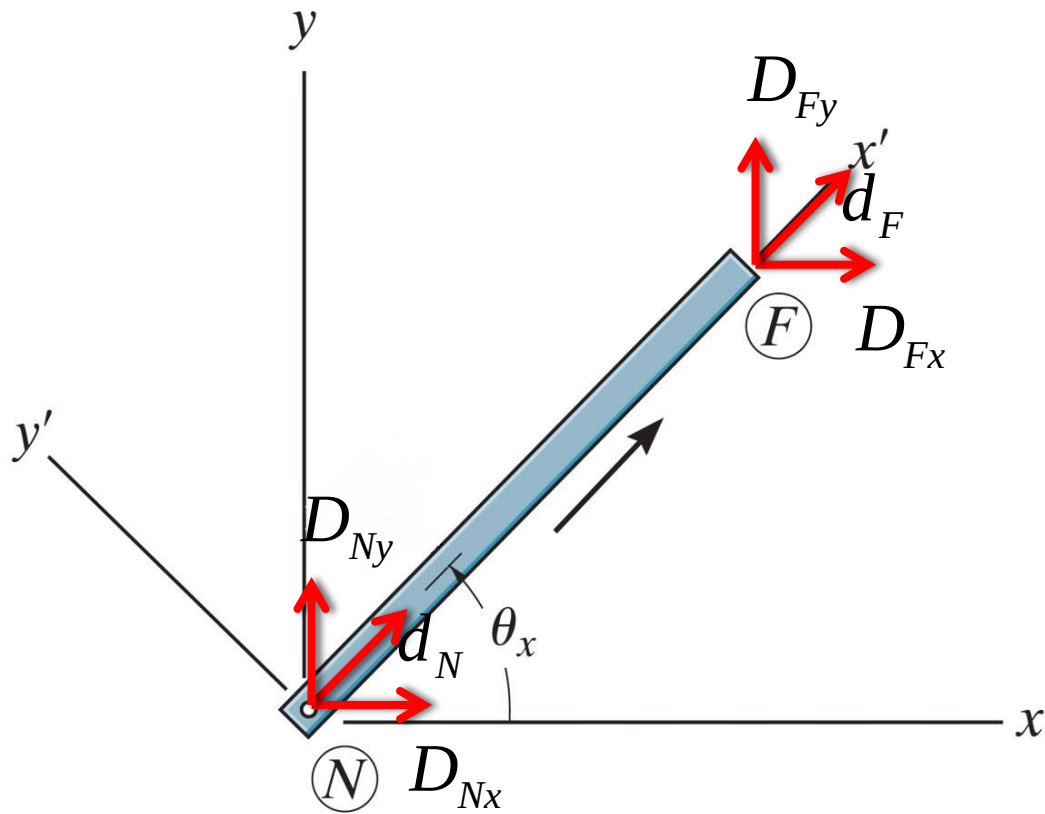
$$\mathbf{k}' = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تحلیل خرپای دو بعدی

انتقال ماتریس سختی عضو از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی و پیدا کردن ماتریس انتقال



تحلیل خرد پای دو بعدی



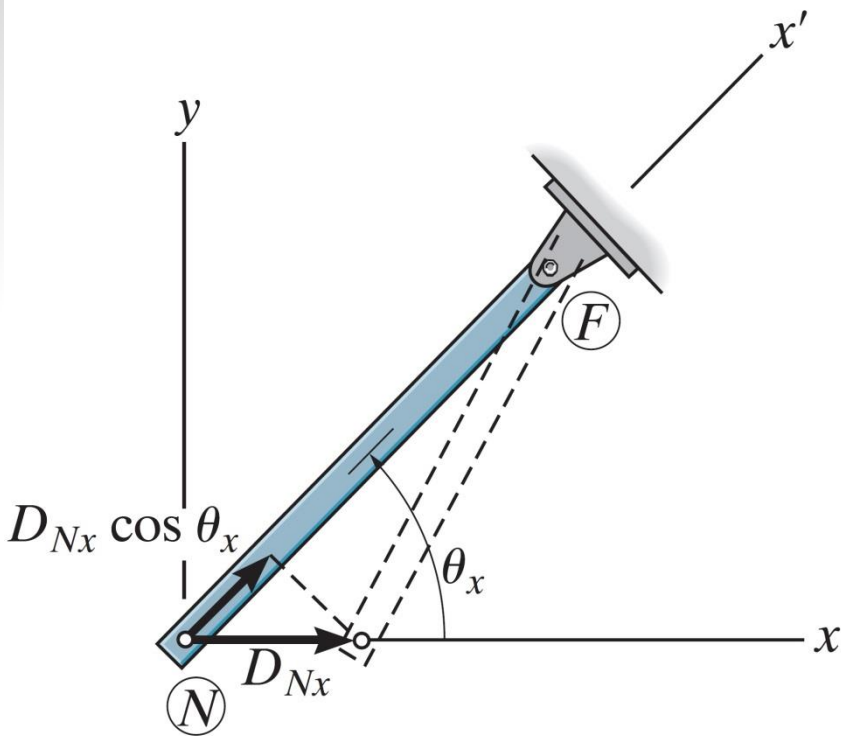
$$\begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

↓
?

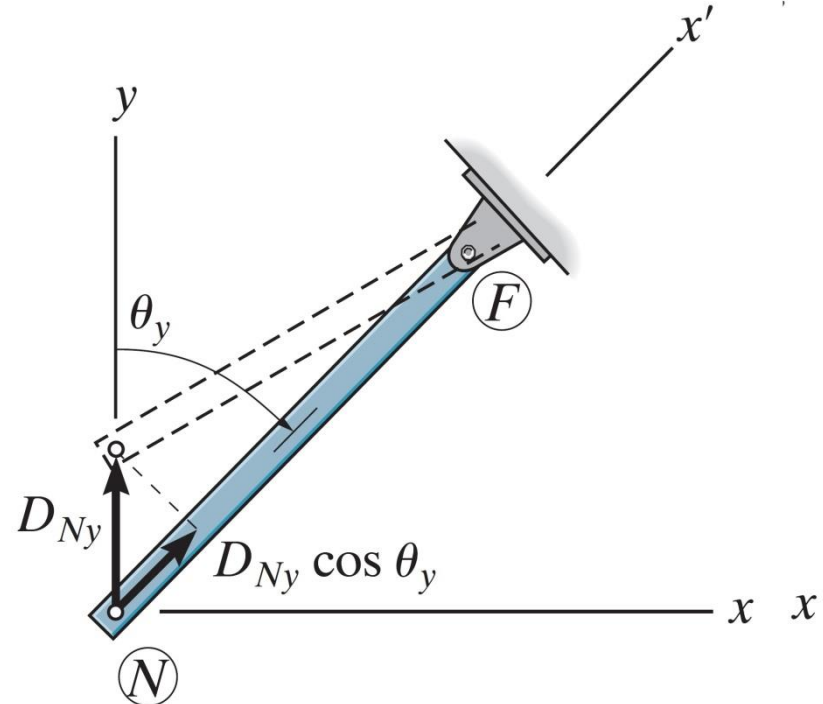
تحلیل خرابای دو بعدی

انتقال ماتریس سختی عضو از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی و پیدا کردن ماتریس انتقال



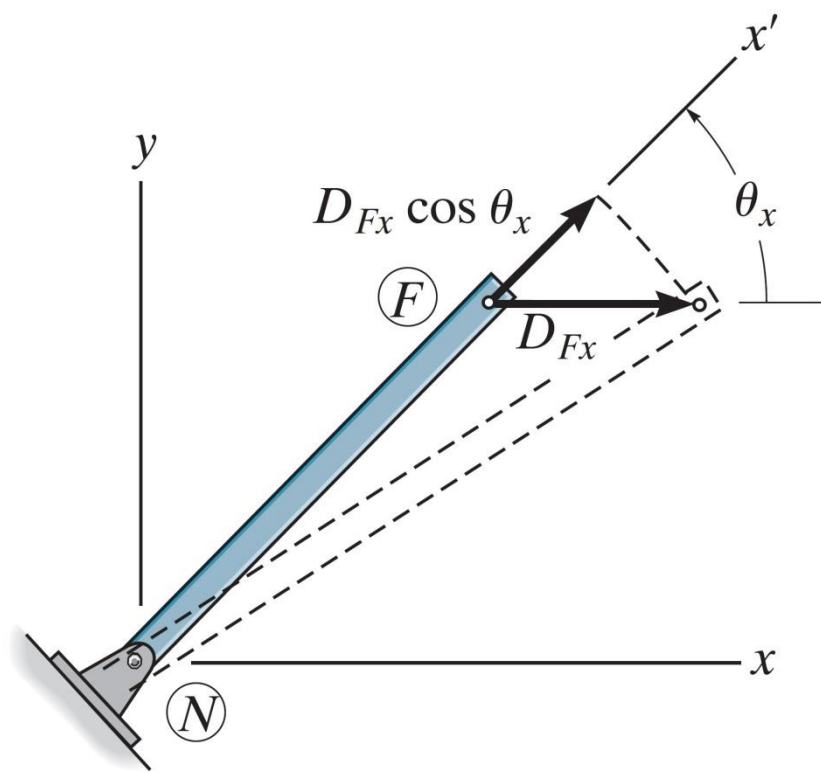
$$\cos \theta_y = \sin \theta_x$$

$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \sin \theta_x$$



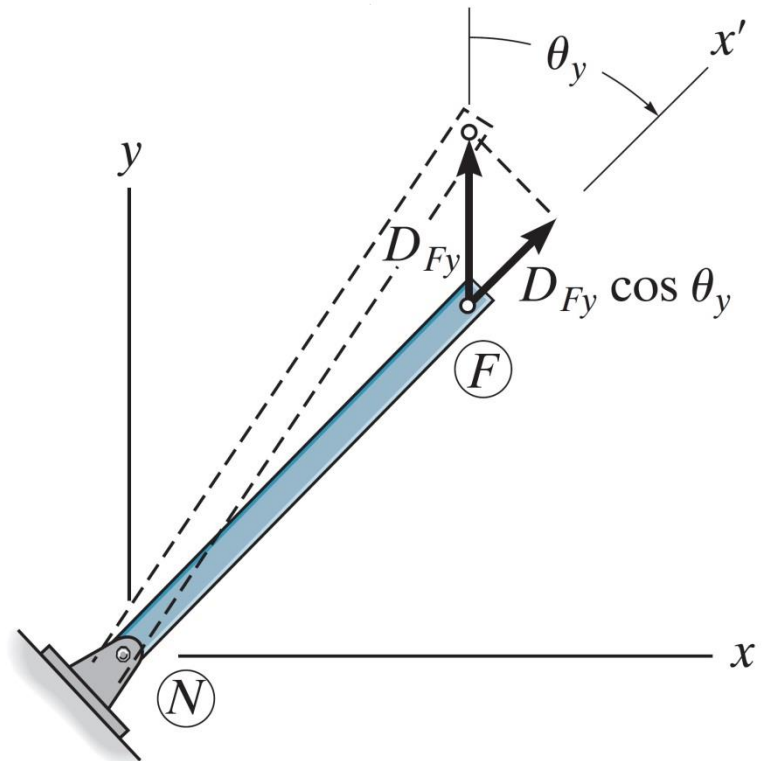
تحلیل خربای دو بعدی

انتقال ماتریس سختی عضو از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی و پیدا کردن ماتریس انتقال



$$\cos \theta_y = \sin \theta_x$$

$$d_F = D_{Fx} \cos \theta_x + D_{Fy} \sin \theta_x$$



تحلیل خرپای دو بعدی

انتقال ماتریس سختی عضو از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی و پیدا کردن ماتریس انتقال

$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \sin \theta_x$$

$$d_F = D_{Fx} \cos \theta_x + D_{Fy} \sin \theta_x$$

در فرم ماتریسی

$$\begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

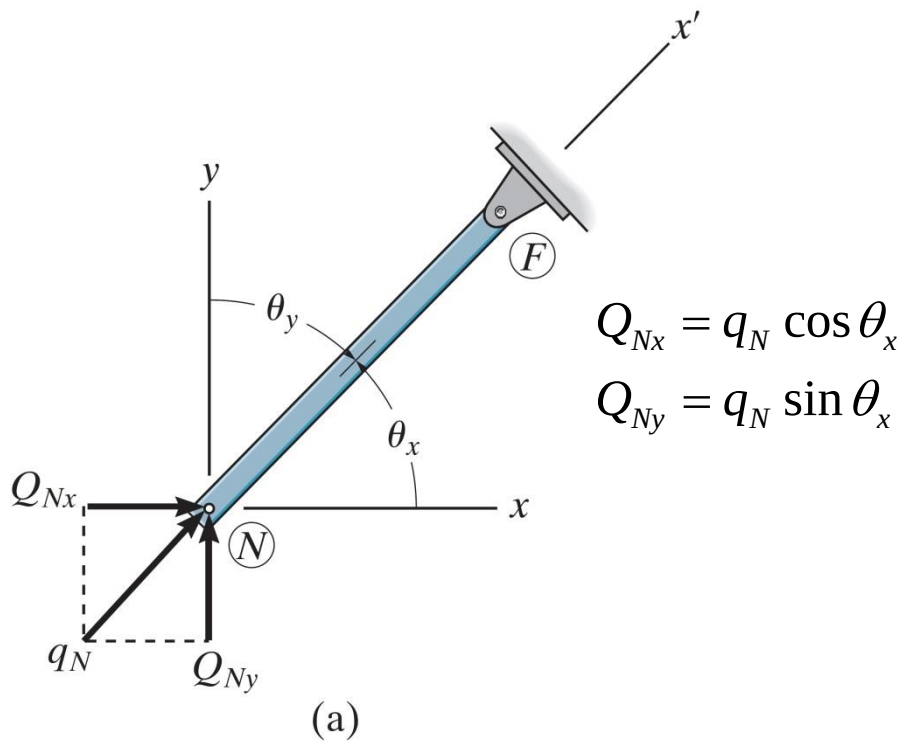
$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D}$$

ماتریس انتقال جابجایی محلی به جابجایی کلی

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \end{bmatrix}$$

تحلیل خریای دو بعدی

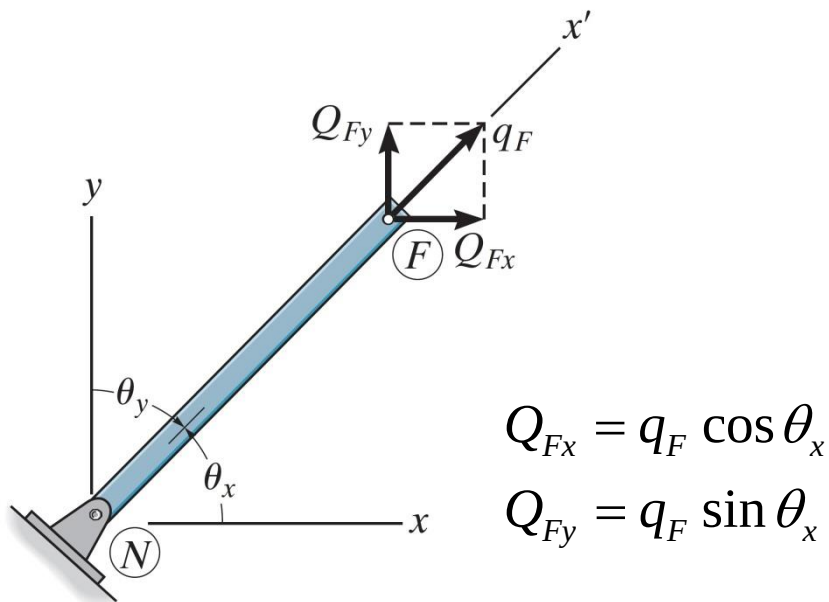
انتقال ماتریس نیروی عضو از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی و پیدا کردن ماتریس انتقال



$$\begin{Bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & 0 \\ \sin \theta_x & 0 \\ 0 & \cos \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix}$$



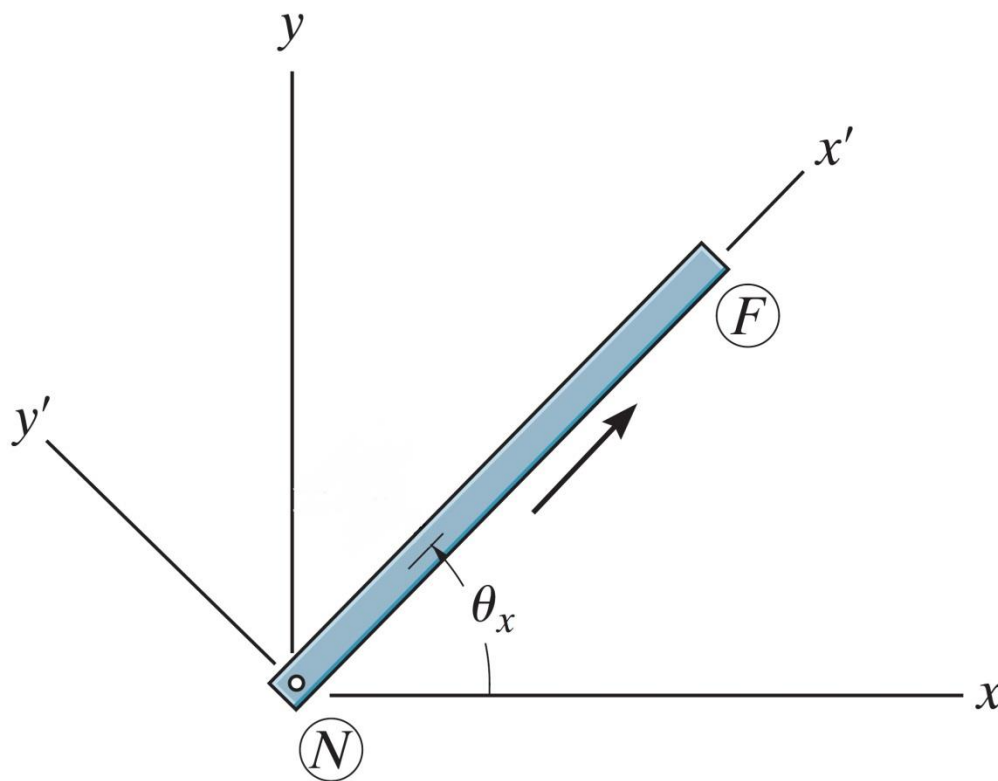
$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$$



ماتریس انتقال بردار نیرو از مختصات محلی به بردار نیرو در مختصات کلی

$\mathbf{T}^T$

تحلیل خرد پای دو بعدی



$$\begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix}$$

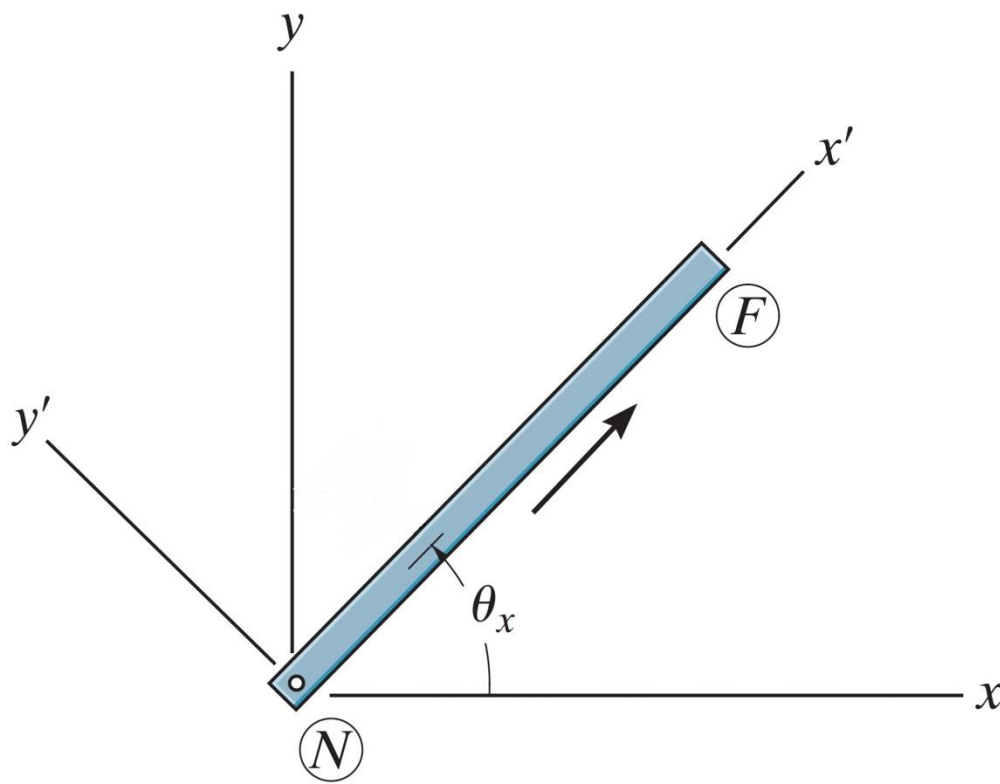
$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$$

تحلیل خرد پای دو بعدی



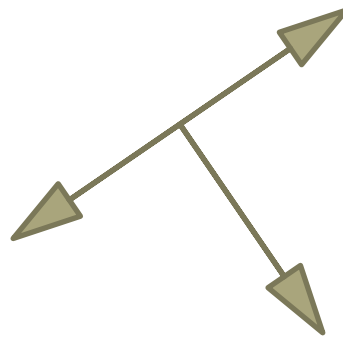
$$\begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{k}] \begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

?



$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

تحلیل خرپای دو بعدی

$$k_m = \frac{AE}{L}$$

$$s = \sin \theta_x$$

$$c = \cos \theta_x$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

$$\left[k^{(m)} \right] = k_e$$

$$\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

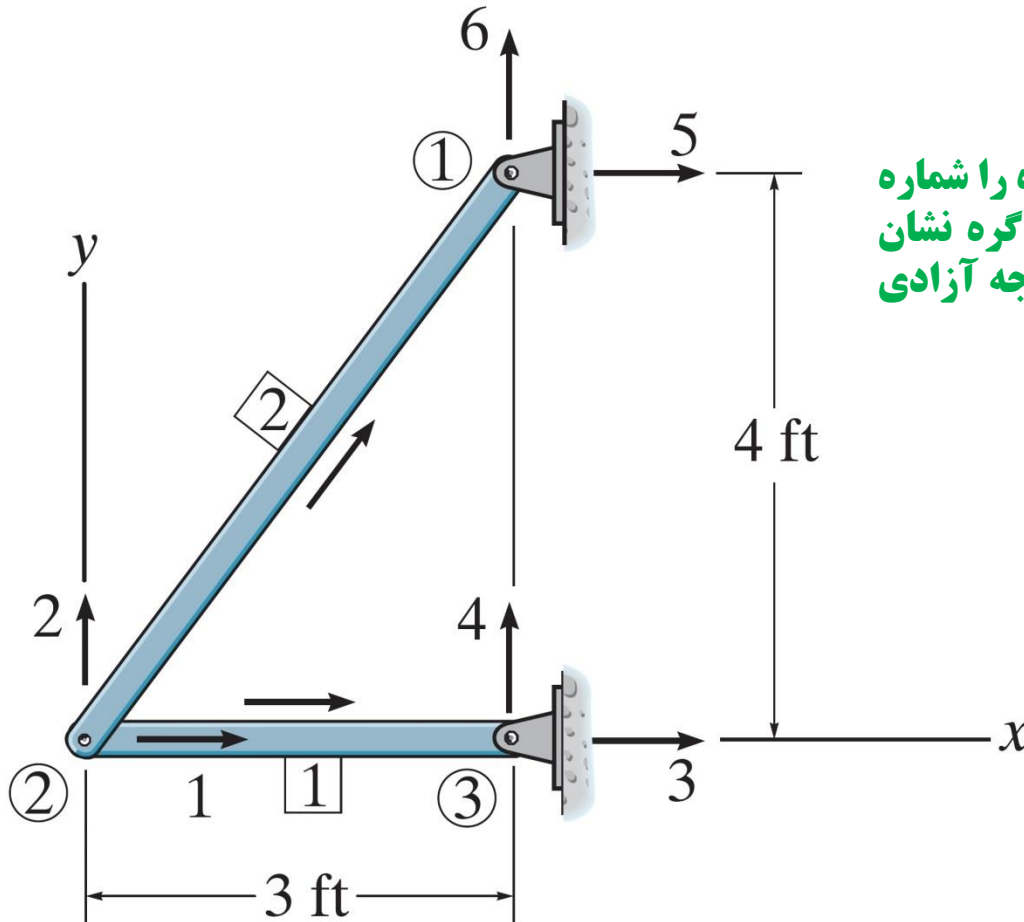
ماتریس سختی هر عضو در دستگاه مختصات کل

در تحلیل ماتریسی خرپای دو بعدی پس از محاسبه ماتریس سختی هر عضو در دستگاه مختصات کل باید سختی ها را به منظور ایجاد سختی کل سازه مونتاژ یا سرهم کرد. سپس با اعمال شرایط مرزی دستگاه معادلات ماتریسی حاصل برای کل سازه را تحلیل کرده و مجهولات مورد نظر را محاسبه می کنیم

تحلیل خرابای دو بعدی

تحلیل گام به گام خرابای دو بعدی با استفاده از روش
تحلیل ماتریسی سازه ها

گام اول: در گام اول باید اعضا و گره های سازه را شماره گذاری کرده و درجات آزادی کل را در هر گره نشان داد. در خرابای دو بعدی هر گره دارای دو درجه آزادی می باشد.



$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

تحلیل خرابای دو بعدی

گام دوم: در گام دوم باید زاویه هر عضو را نسبت به افق محاسبه کرد و سپس ماتریس سختی هر عضو را در دستگاه مختصات کل حساب کرد.

عضو یک

$$\theta_x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_x = 1 \\ \sin \theta_x = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

عضو دو

$$L = \sqrt{16+9} = 5 \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_x = 3/5 \\ \sin \theta_x = 4/5 \end{cases}$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

تحلیل خرپای دو بعدی

گام سوم: در گام سوم باید سختی تمام اعضا را به منظور به دست آوردن سختی کل مونتاژ یا سرهم کرد

روش اول: در این روش ماتریس سختی چهار در چهار عضو را به تعداد درجات آزادی کل سازه بسط داده تا ماتریسی با درجه ای برابر با درجه آزادی کل سازه حاصل شود. این کار را با اضافه کردن درایه های صفر در ستون و ردیف نظیر درجات آزادی غیر مرتبط با عضو مربوطه انجام می دهیم.

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

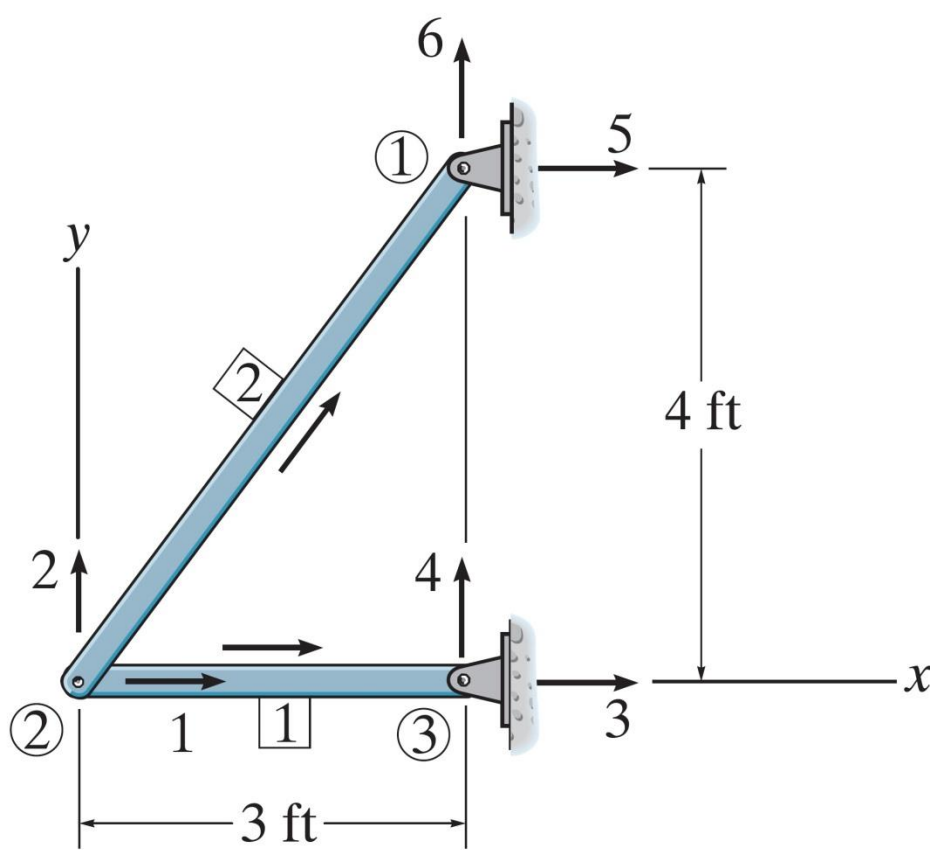
$$+ AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & 0 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

تحلیل خرپای دو بعدی

روش دوم: در این روش با استفاده از جدول تناظر جابجایی های گره ای به طور مستقیم درایه های ماتریس سختی کل را از درایه های ماتریس های سختی اعضا به دست می آوریم. در این جدول صفر بیانگر عدم ارتباط می باشد



جابجایی کلی	جابجایی المان ۱	جابجایی المان ۲
۱	۱	۱
۲	۲	۲
۳	۳	۰
۴	۴	۰
۵	۰	۳
۶	۰	۴

تحلیل خریای دو بعدی

جایابی کلی	جایابی المان ۱	جایابی المان ۲
۱	۱	۱
۲	۲	۲
۳	۳	۰
۴	۴	۰
۵	۰	۳
۶	۰	۴

$$K_{11} = k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)}$$

$$K_{12} = k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(2)}$$

$$K_{13} = k_{13}^{(1)} + 0$$

$$K_{14} = k_{14}^{(1)} + 0$$

$$K_{15} = 0 + k_{13}^{(2)}$$

$$K_{16} = 0 + k_{14}^{(2)}$$

$$K_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)}$$

$$K_{23} = k_{23}^{(1)} + 0$$

$$K_{24} = k_{24}^{(1)} + 0$$

$$K_{25} = k_{23}^{(2)} + 0$$

$$K_{26} = k_{24}^{(2)} + 0$$

$$K_{33} = k_{33}^{(1)} + 0$$

$$K_{34} = k_{34}^{(1)} + 0$$

$$K_{35} = 0 + 0$$

$$K_{36} = 0 + 0$$

$$K_{44} = k_{44}^{(1)} + 0$$

$$K_{45} = 0 + 0$$

$$K_{46} = 0 + 0$$

$$K_{55} = 0 + k_{33}^{(2)}$$

$$K_{56} = 0 + k_{34}^{(2)}$$

$$K_{66} = 0 + k_{44}^{(2)}$$

تحلیل خرد پای دو بعدی

گام چهارم: پس از نوشتن ماتریس سختی کل و در نتیجه معادلات ماتریسی کل سازه، باید شرایط جابجایی و نیرویی سازه را به معادلات اعمال کرد و سپس اقدام به محاسبه مجهولات نمود.

$$b.c \rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = -2 \\ D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تحلیل خرابای دو بعدی

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ \hline -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 \\ 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{4.505}{AE} \quad D_2 = \frac{-19.003}{AE}$$

$$\begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 \\ -0.096 & -0.128 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = -0.333(4.505) = -1.5 \text{ k}$$

$$Q_4 = 0$$

$$Q_5 = -0.072(4.505) - 0.096(-19.003) = 1.5 \text{ k}$$

$$Q_6 = -0.096(4.505) - 0.128(-19.003) = 2.0 \text{ k}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

$$q_1 = \frac{AE}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3} [-4.505] = -1.5 \text{ k}$$

$$q_2 = \frac{AE}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{5} [-0.6(4.505) - 0.8(-19.003)] = 2.5 \text{ k}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

فرمول‌بندی خصوصیات ماتریسی عضو تیر بر اساس مفروضات زیر صورت می‌گیرد:

- ۱- تیر فقط در جهت Y بارگذاری می‌شود.
- ۲- تغییر شکل‌های تیر در مقایسه با خصوصیات ابعادی تیر کوچک هستند.
- ۳- مصالح تیر الاستیک خطی، ایزوتروپیک و همگن می‌باشد.
- ۴- تیر منشوری است و سطح مقطع آن حداقل دارای یک محور متقارن در صفحه خمش باشد.

تحلیل تیر به روش ماتریسی

نماد گذاری استفاده شده برای تحلیل خرابی دو بعدی و جهت مثبت قراردادی

دوران حول محور عمود بر صفحه (محور Z) در انتهای نزدیک

$$d_{Nz'}$$

تغییر مکان عمود بر امتداد تیر در انتهای نزدیک

$$d_{Ny'}$$

دوران حول محور عمود بر صفحه (محور Z) در انتهای دور

$$d_{Fz'}$$

تغییر مکان عمود بر امتداد تیر در انتهای دور

$$d_{Fy'}$$

ماتریس سختی عضو تیر

$$k$$

نیروی برشی در انتهای نزدیک

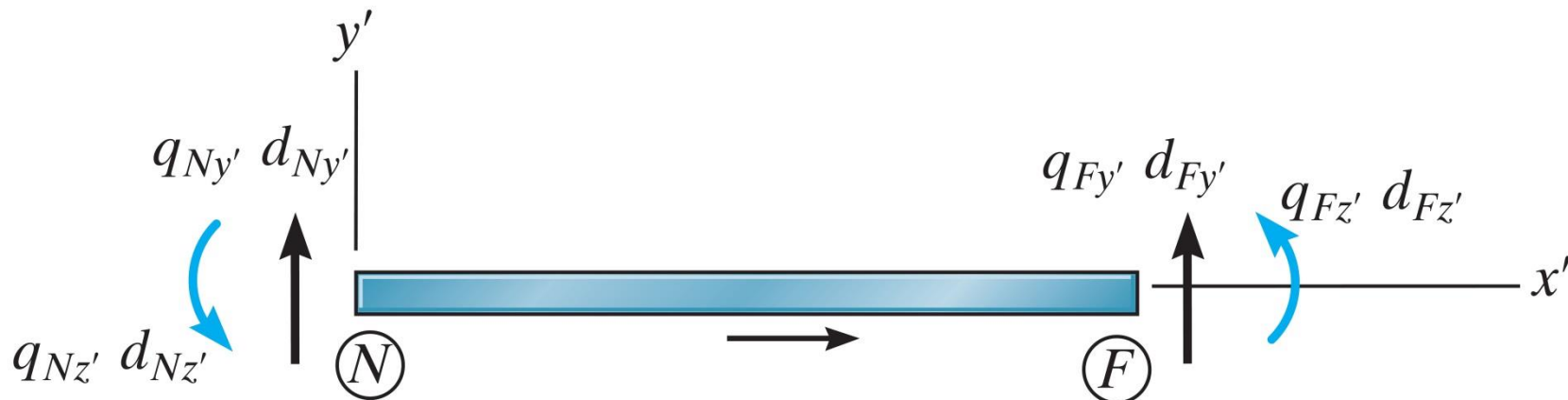
$$q_{Ny'}$$

ماتریس سختی کل سازه

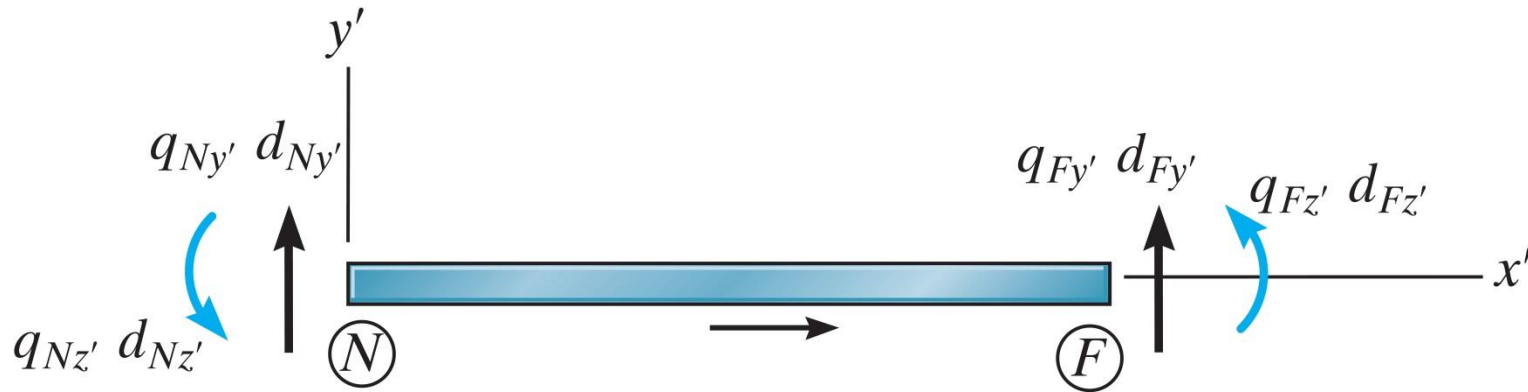
$$K$$

نیروی برشی در انتهای دور

$$q_{Fy'}$$



ضریب سختی K_{ij} بیانگر نیرو در درجه آزادی i به علت تغییر مکان واحد در درجه آزادی j می باشد.



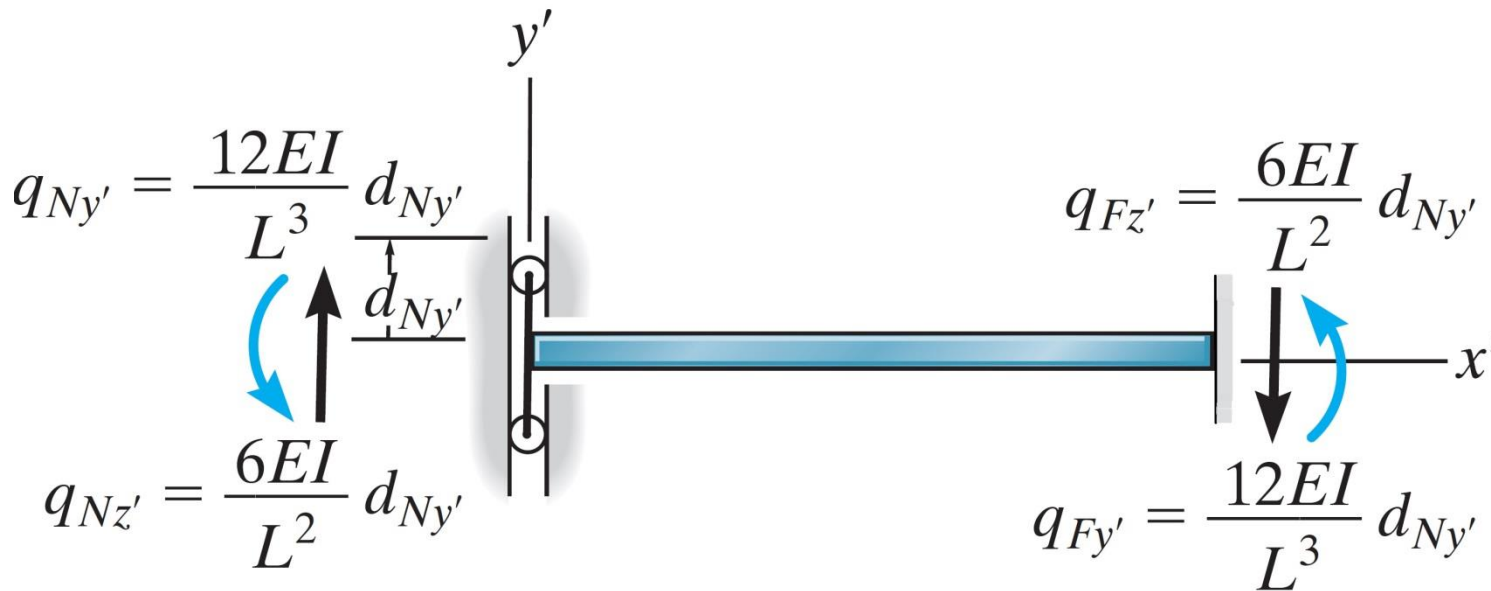
$$\begin{Bmatrix} q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{Bmatrix}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

استخراج ماتریس سختی عضو تیر

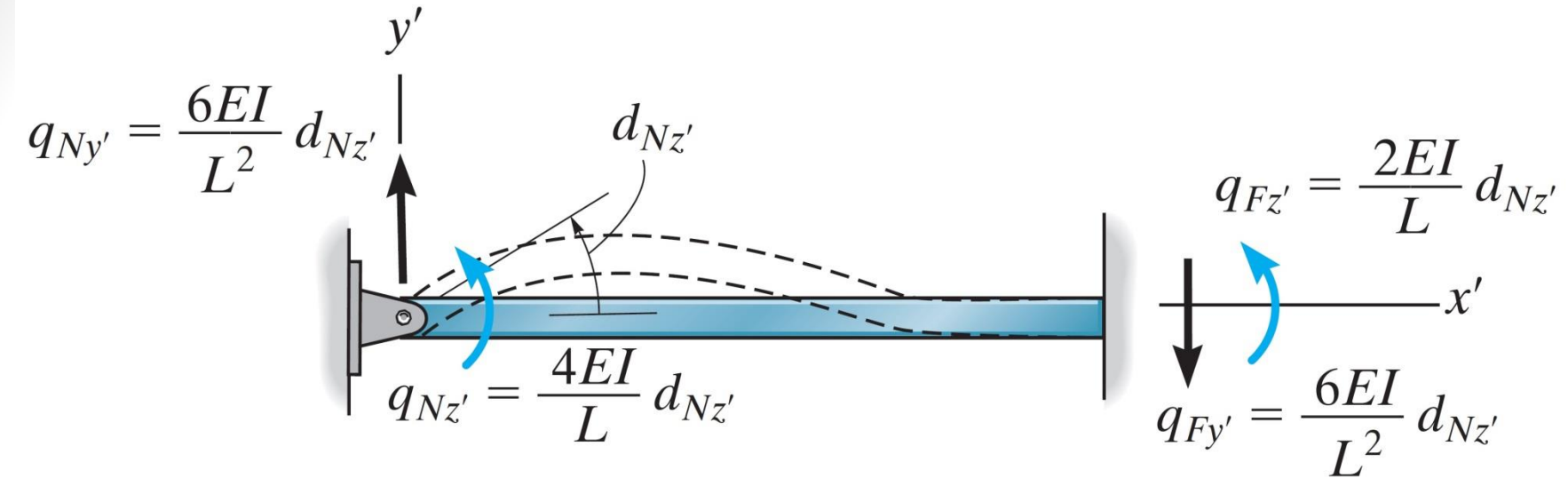
برای به دست آوردن ضرایب سختی باید به ترتیب هر به هر کدام از درجه های آزادی تغییر مکان واحد داده و دیگر درجات آزادی بدون تغییر بمانند و سپس نیروهای حاصل شده در همه درجات آزادی را محاسبه کرد که بیانگر سختی نظیر آن درجه آزادی خواهد بود.

پس از ایجاد تغییر مکان واحد در هر درجه آزادی باید از روشها موجود مثل روش شیب افت سختی هر نیرو در هر درجه آزادی را حساب کرد.



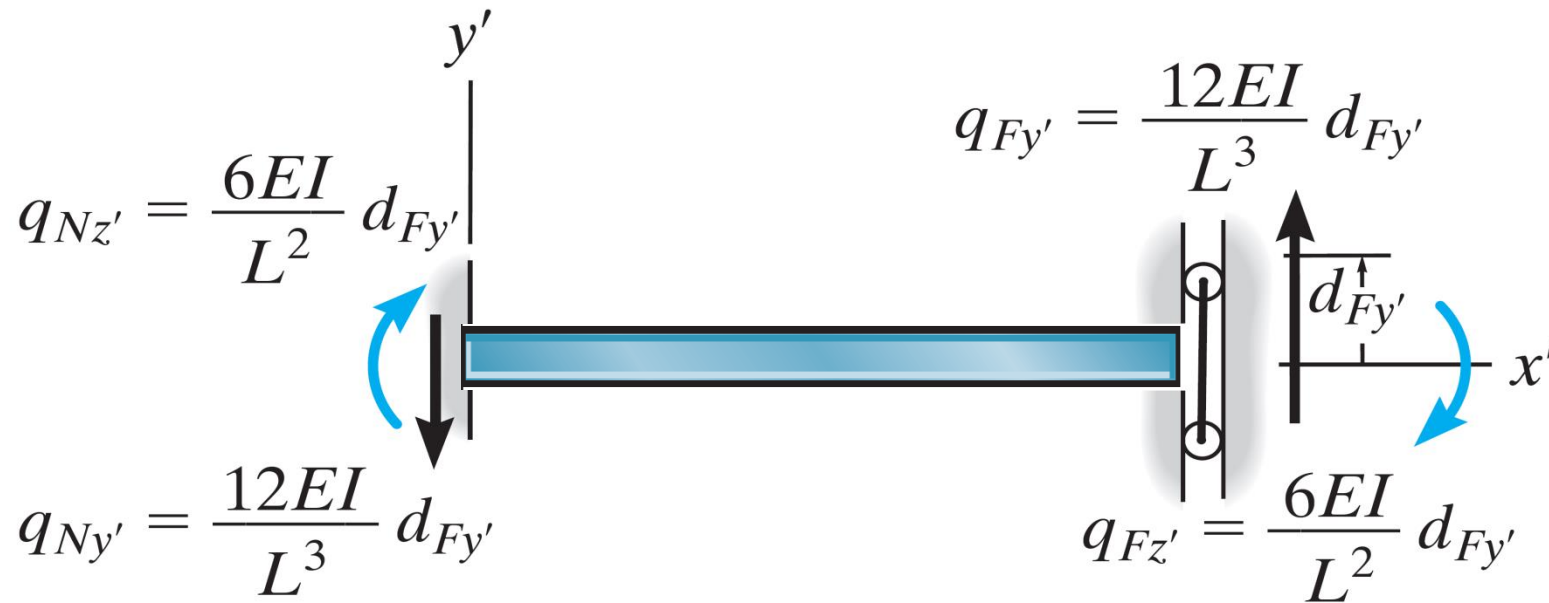
$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3}, \quad k_{12} = \frac{6EI}{L^2}, \quad k_{13} = -\frac{12EI}{L^3}, \quad k_{14} = \frac{6EI}{L^2},$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی



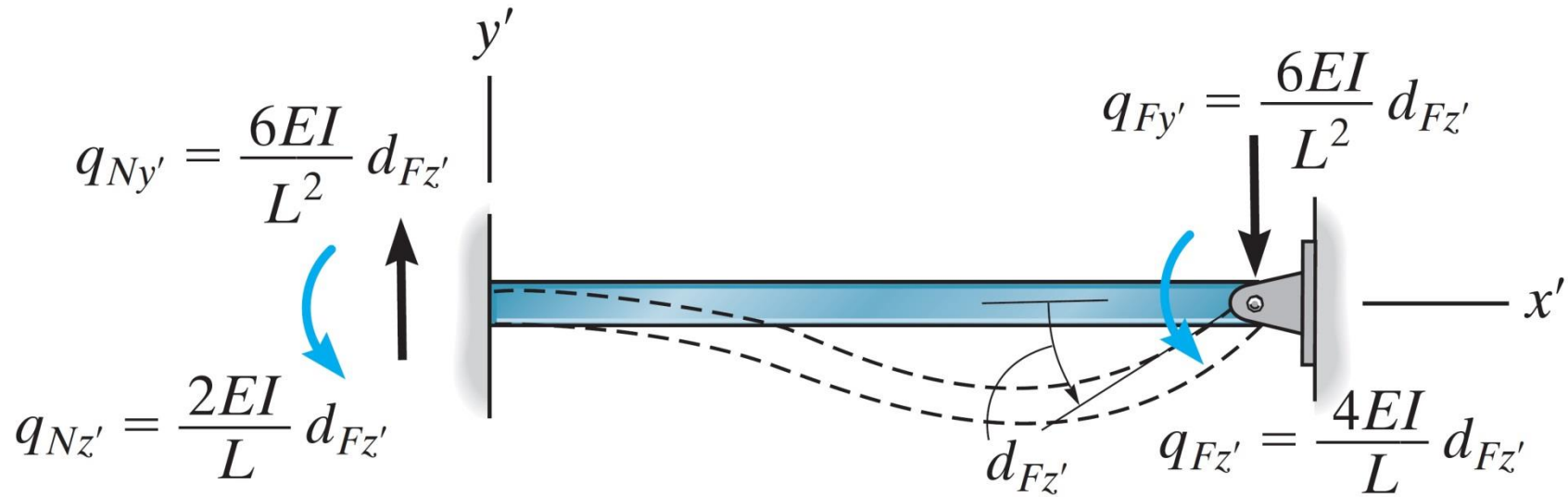
$$k_{21} = \frac{6EI}{L^2}, \quad k_{22} = \frac{4EI}{L}, \quad k_{23} = -\frac{6EI}{L^2}, \quad k_{24} = \frac{2EI}{L},$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی



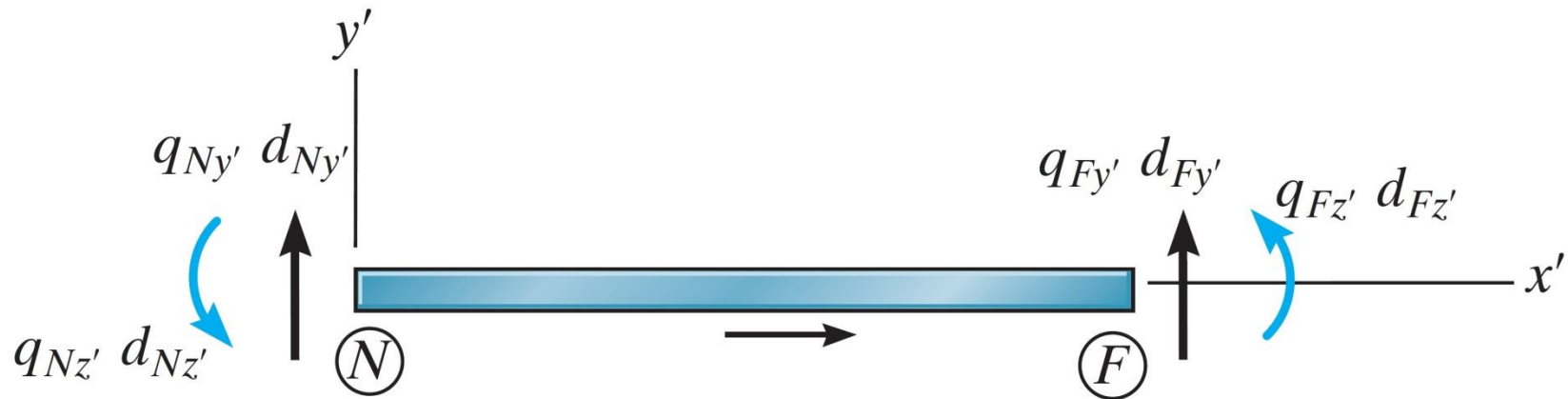
$$k_{31} = -\frac{12EI}{L^3}, \quad k_{32} = -\frac{6EI}{L^2}, \quad k_{33} = \frac{12EI}{L^3}, \quad k_{34} = -\frac{6EI}{L^2},$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی



$$k_{41} = \frac{6EI}{L^2}, \quad k_{42} = \frac{2EI}{L}, \quad k_{43} = -\frac{6EI}{L^2}, \quad k_{44} = \frac{4EI}{L},$$

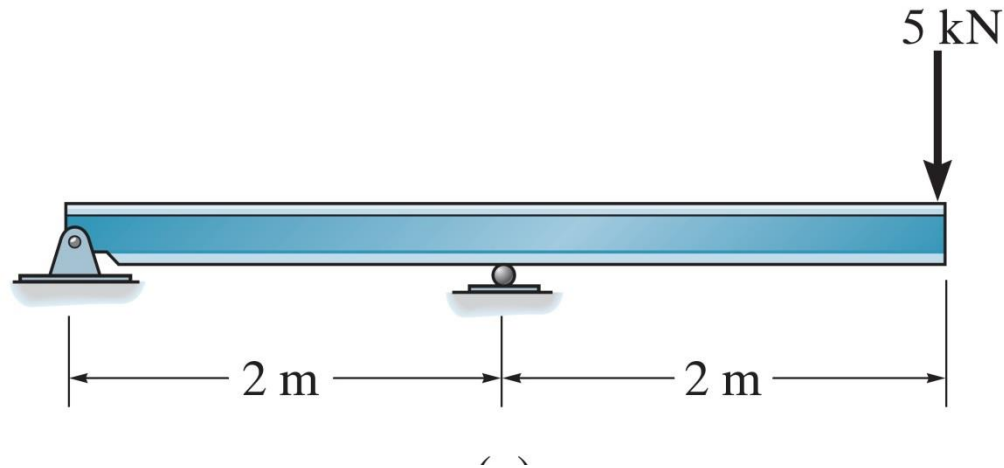
تحلیل تیر به روش ماتریسی



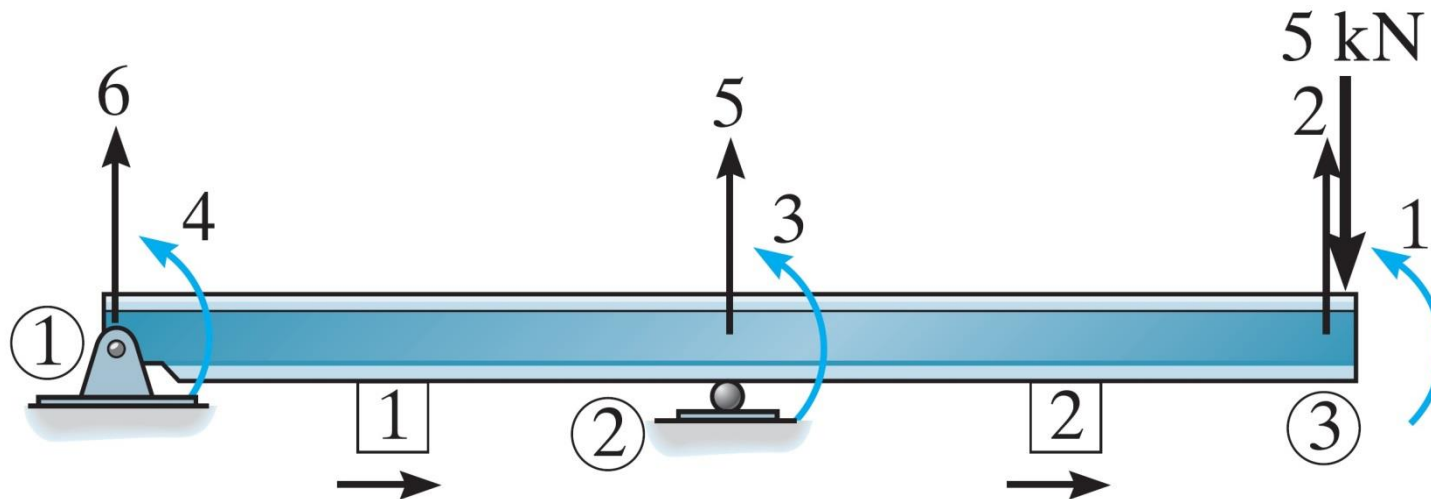
$$\begin{bmatrix} q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

مثال: تحلیل تیر به روش ماتریسی



گام اول: در گام اول باید اعضا و گره های سازه را شماره گذاری کرده و درجات آزادی کل را در هر گره نشان داد.



تحلیل تیر به روش ماتریسی

گام دوم: در گام دوم باید ماتریس سختی هر عضو را حساب کرد.

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

گام سوم: در گام سوم باید سختی تمام اعضا را به منظور به دست آوردن سختی کل مونتاژ یا سرهم کرد. طبق آنچه در قسمت مربوط به خریا گفته شد این کار را یا به روش بسط ماتریس سختی هر عضو یا به روش تشکیل جدول اتصال جابجایی های کل سازه به جابجایی های اعضا انجام میدهیم

$$K = EI \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & 1 & 0 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 1 & -1.5 & 4 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ \hline Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1.5 & 1 & 0 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 1 & -1.5 & 4 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1.5 & 1.5 \\ \hline 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

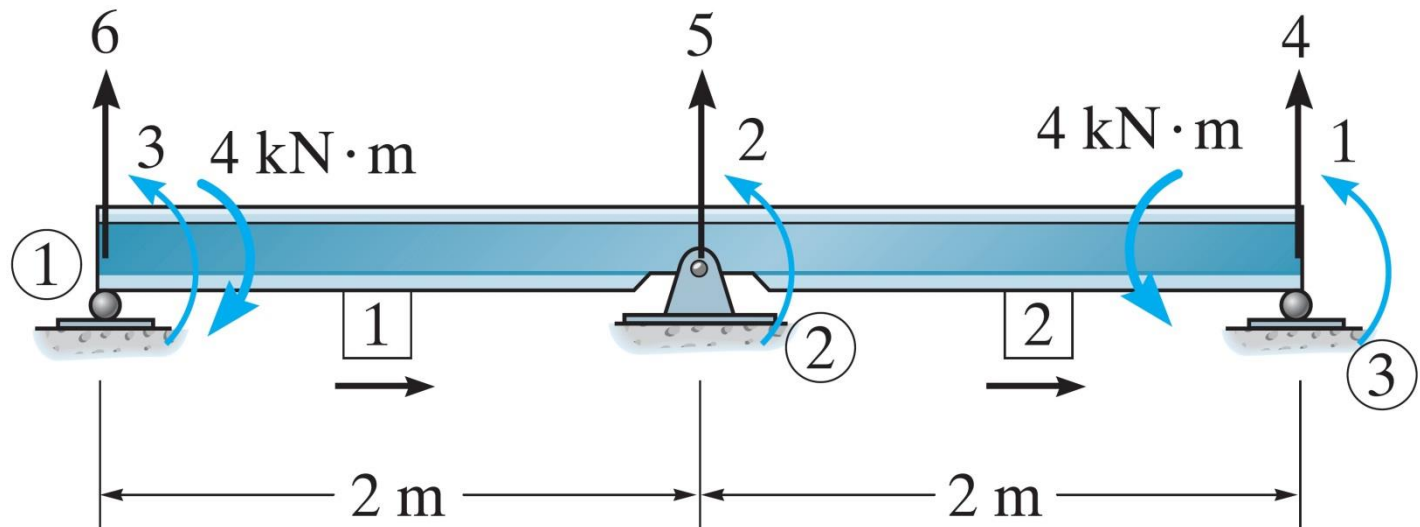
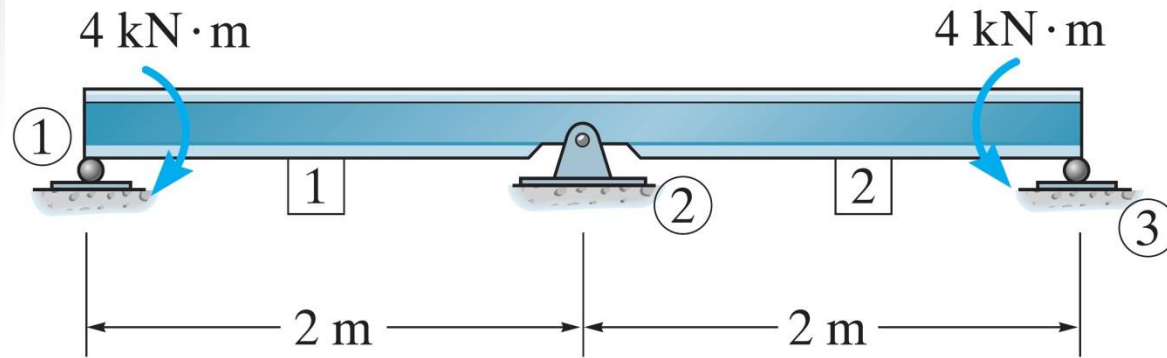
$$\begin{aligned} 0 &= 2D_1 - 1.5D_2 + D_3 + 0 \\ -\frac{5}{EI} &= -1.5D_1 + 1.5D_2 - 1.5D_3 + 0 \\ 0 &= D_1 - 1.5D_2 + 4D_3 + D_4 \\ 0 &= 0 + 0 + D_3 + 2D_4 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} D_1 &= -\frac{16.67}{EI} \\ D_2 &= -\frac{26.67}{EI} \\ D_3 &= -\frac{6.67}{EI} \\ D_4 &= \frac{3.33}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_5 &= 1.5EI\left(-\frac{16.67}{EI}\right) - 1.5EI\left(-\frac{26.67}{EI}\right) + 0 - 1.5EI\left(\frac{3.33}{EI}\right) \\ &= 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_6 &= 0 + 0 + 1.5EI\left(-\frac{6.67}{EI}\right) + 1.5EI\left(\frac{3.33}{EI}\right) \\ &= -5 \text{ kN} \end{aligned}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

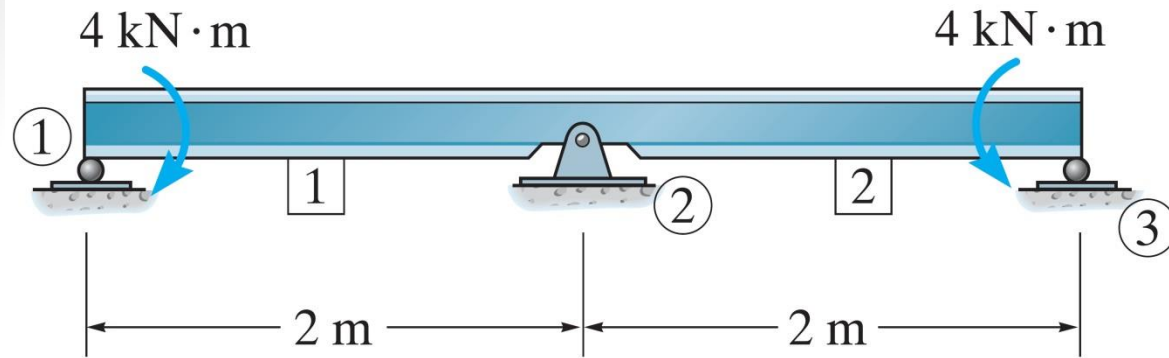
مثال: در این مثال تکیه گاه وسط به اندازه ۱.۵ میلی متر نشست کرده است



$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 2 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

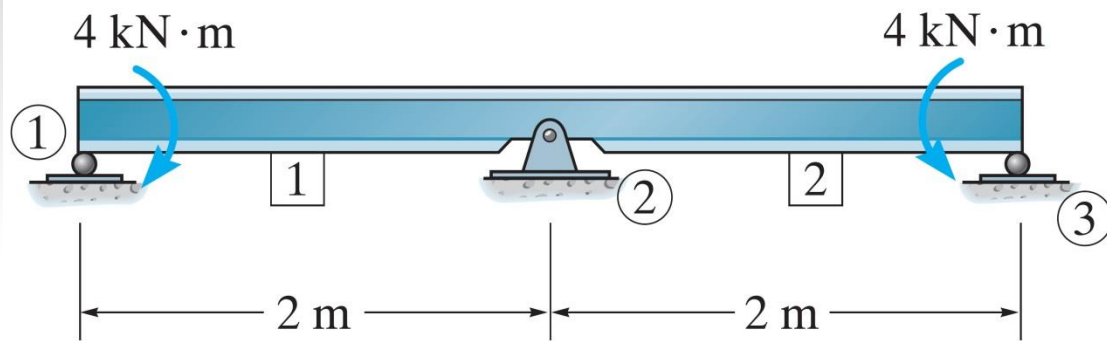
$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تحليل تير به روش ماتريسي



$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ \hline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ \hline -1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 0 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی



$$\frac{4}{EI} = 2D_1 + D_2 + 0D_3 - 1.5(0) + 1.5(-0.0015) + 0$$

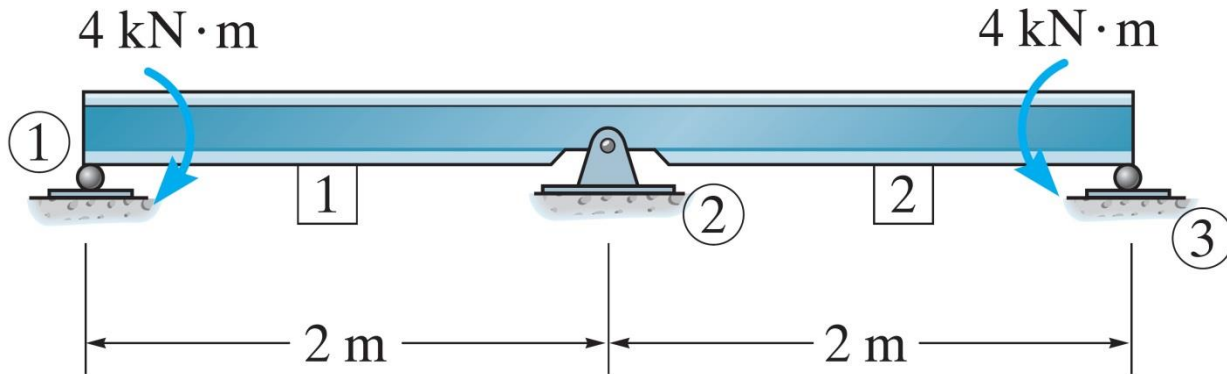
$$0 = 1D_1 + 4D_2 + 1D_3 - 1.5(0) + 0 + 0$$

$$\frac{-4}{EI} = 0D_1 + 1D_2 + 2D_3 + 0 - 1.5(-0.0015) + 0$$

$$EI = 200(10^6)(22)(10^{-6})$$

$$D_1 = 0.001580 \text{ rad}, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = -0.001580 \text{ rad}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی



$$Q_4 = -0.525 \text{ kN}$$

$$Q_5 = 1.05 \text{ kN}$$

$$Q_6 = -0.525 \text{ kN}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

تحلیل تیر تحت بار گسترده: با توجه به اینکه ماتریس سختی عضو تیر برای وضعیتی توسعه یافت که در آن وضعیت بارگذاری داخل دهانه وجود نداشت و بارها تنها به گره ها اعمال می شدند، و همچنین با توجه به این که در عمل بیشتر با تیرهایی روبه رو هستیم که تحت بارهای گسترده یا متمرکز در وسط دهانه خود هستند، لذا به منظور استفاده از روش تحلیل ماتریسی باید بارهای گسترده یا متمرکز داخل دهانه را با بارهای گره ای جایگزین کنیم. طبیعتاً بارهای گره ای معادل باید اثر یکسانی با شرایط بارگذاری اصلی داشته باشند.

از جمله اثراتی که باید در هر دو وضعیت بارگذاری اصلی و بارگذاری گره ای معادل با آن یکسان باشد، کار انجام شده توسط این دو وضعیت بارگذاری می باشد. در نتیجه با برابر قرار دادن کار انجام شده توسط بارگذاری اصلی و کار انجام شده توسط بارهای گره ای معادل میتوان بارهای گره ای معادل را به دست آورد.

$$W = \int_0^L q(x) v(x) dx = F_{1q} v_1 + M_{1q} \theta_1 + F_{2q} v_2 + M_{2q} \theta_2$$

تابع بار گسترده

تابع تغییر شکل تیر تحت بار گسترده

بردار نیروهای گره ای معادل

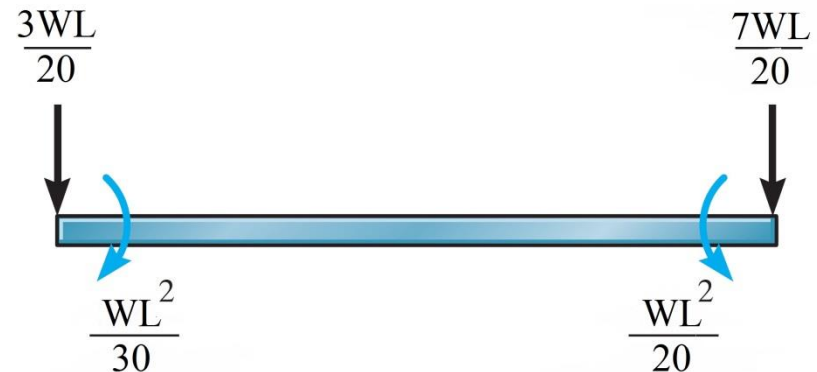
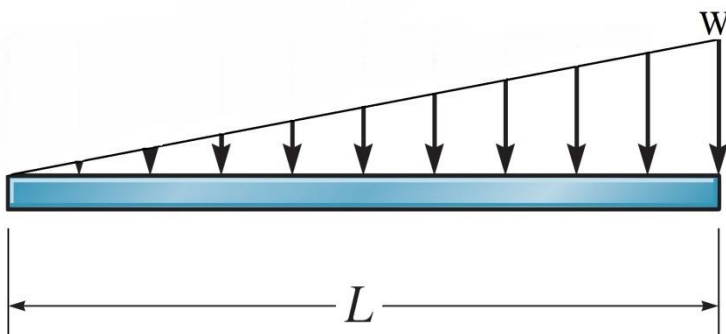
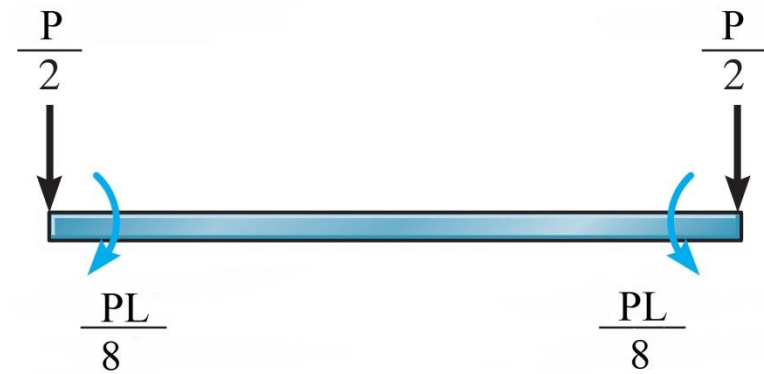
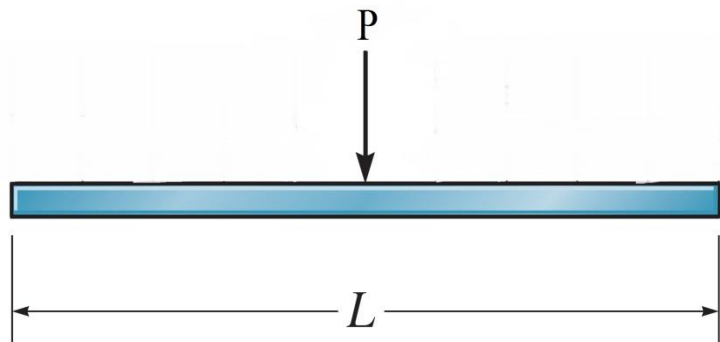
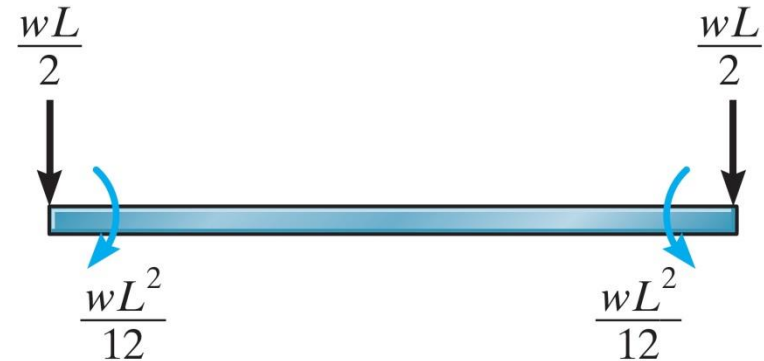
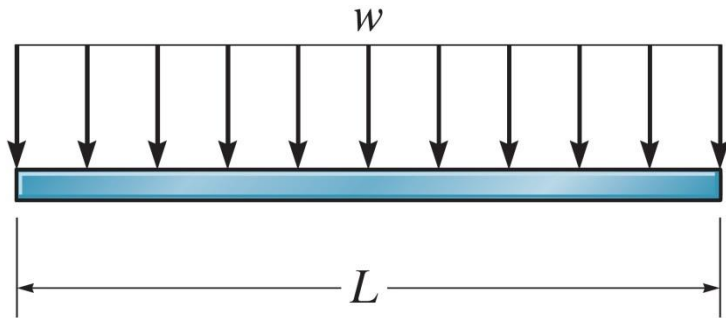
بردار تغییر مکانهای گره ای

$$\begin{Bmatrix} F_{1q} \\ M_{1q} \\ F_{2q} \\ M_{2q} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

بارهای گره ای معادل



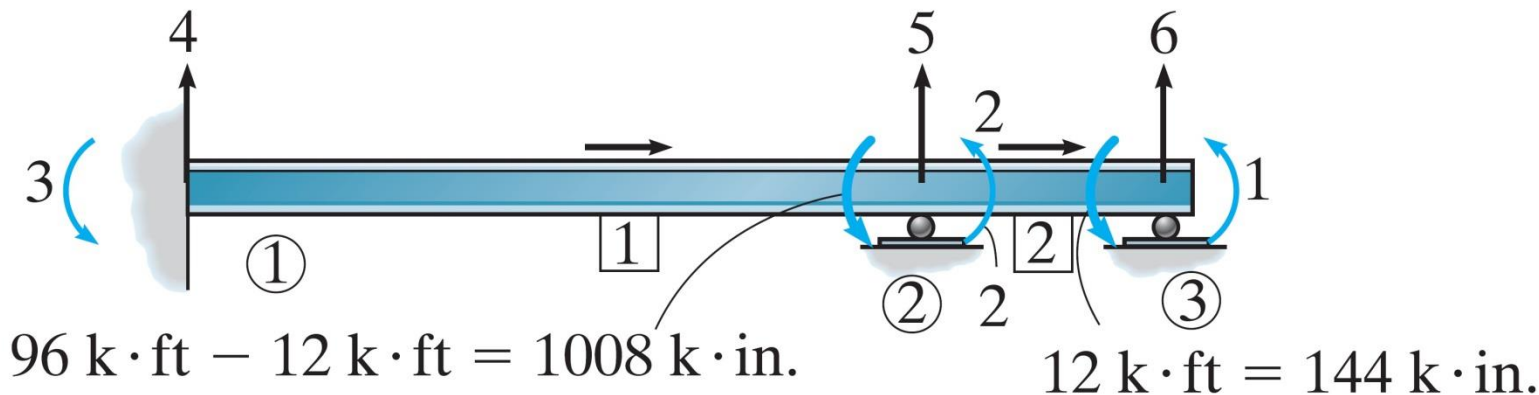
تحلیل تیر به روش ماتریسی

مثال برای تیر تحت بار داخل دهانه

در گام اول باید اعضا، گره ها و درجات آزادی را شماره گذاری کرد.

سپس باید بارهای معادل گره ای را محاسبه نمود. با توجه به شکل چون نیرو در درجات آزادی ۳، ۴، ۵ و ۶ مجهول است لذا نیروهای گره ای معادل نیز با آنها جمع شده و باز هم مجهول خواهند بود. لذا فقط مولفه های نیروهای گره ای معادل را در درجات آزادی ۱ و ۲ بصورت لنگر متمرکز اعمال میکنیم. در نتیجه شرایط مرزی را می توان به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$



تحليل تير به روش ماتریسی

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 3 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 7.430 & 1069.9 & -7.430 & 1069.9 \\ 1069.9 & 205\,417 & -1069.9 & 102\,708 \\ -7.430 & -1069.9 & 7.430 & -1069.9 \\ 1069.9 & 102\,708 & -1069.9 & 205\,417 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 2 & 6 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 200.602 & 9628.91 & -200.602 & 9628.91 \\ 9628.91 & 616\,250 & -9628.91 & 308\,125 \\ -200.602 & -9628.91 & 200.602 & -9628.91 \\ 9628.91 & 308\,125 & -9628.91 & 616\,250 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

تحلیل تیر به روش ماتریسی

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 616\,250 & 308\,125 & 0 & 0 & 9628.91 & -9628.91 \\ 308\,125 & 821\,667 & 102\,708 & 1069.9 & 8559.01 & -9628.91 \\ \hline 0 & 102\,708 & 205\,417 & 1069.9 & -1069.9 & 0 \\ 0 & 1069.9 & 1069.9 & 7.430 & -7.430 & 0 \\ 9628.91 & 8559.01 & -1069.9 & -7.430 & 208.03 & -200.602 \\ -9628.91 & -9628.91 & 0 & 0 & -200.602 & 200.602 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$144 = 616\,250D_1 + 308\,125D_2$$

$$1008 = 308\,125D_1 + 821\,667D_2$$

$$D_1 = -0.4673(10^{-3}) \text{ in.}$$

$$D_2 = 1.40203(10^{-3}) \text{ in.}$$