بسمه تعالی

تحلیل سازه ۲

استاد:

محمدرضا سلطانی

مرجع:

تحلیل مقدماتی سازه ها، نویسنده: یوهان یوشی، مترجم: حمید بدیعی

کوییز هر هفته دوشنبه صبح ساعت ۷:۳۰ الی ۷:۴۵ از مباحث بیان شده در هفته گذشته

امتحان میان ترم ۹۲/۰۵/۲۲ ساعت ۱۳:۰۰

عناوین:

۱- تحلیل سازه های نامعین استاتیکی به روش شیب افت (با حرکت جانبی و بدون حرکت جانبی)

۲- تحلیل سازه های نامعین استاتیکی به روش پخش لنگر (با حرکت جانبی و بدون حرکت جانبی)

۳-خط اثر سازه های نامعین با استفاده از روش پخش لنگر

۴- آنالیز ماتریسی سازه ها (به روش نیرویی)

۵- روش شیب-افت و پخش لنگر برای اعضای غیر منشوری (با سطح مقطع متغیر)

روش شیب– افت

روش شیب- افت *slope-deflection method*

فرضیات روش شیب– افت

۱- صرف نظر از اثر نیروی محوری

۲- صرف نظر از اثر نیروی برشی

قرارداد علامت در روش شیب– افت

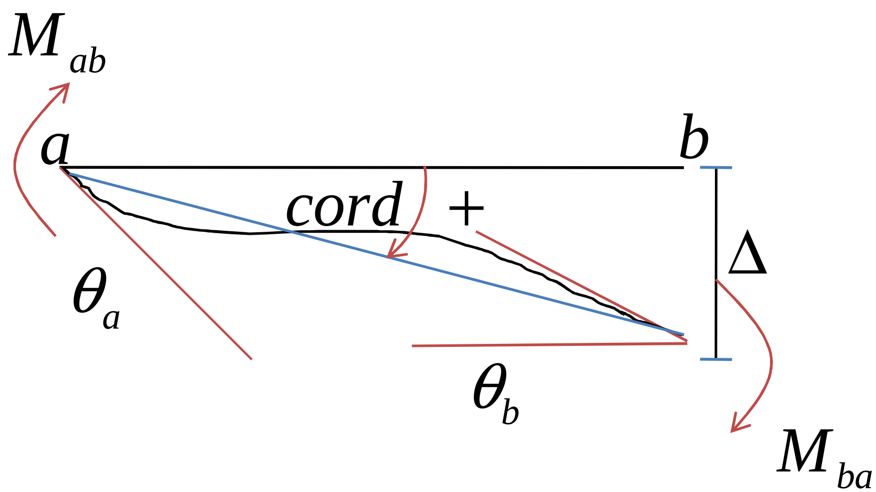
۱- لنگر موثر به انتهای عضو در صورتی مثبت است که در جهت عقربه های ساعت باشد

۲- θ زاویه دوران مماس بر منحنی تغییر شکل الاستیک در صورتی مثبت که نسبت به حالت اولیه در جهت عقربه های ساعت حرکت کند.

۳- در صورتی که زاویه دوران خط واصل بین دو انتهای منحنی تغییرشکل الاستیک نسبت به موقعیت اولیه در جهت عقربه های ساعت حرکت کند، آنگاه این زاویه مثبت است.

شیب افت:

از روش شیب افت برای آنالیز تمام انواع تیرها و قابهای صلب نامعین متشکل از اعضای منشوری یا غیر منشوری میتوان استفاده کرد.



معادلات اساسی شیب افت:

$M_{ab} = f\,(\theta_a, \theta_b, \Delta, ab$ بارگذاری روی دهانه)

$M_{ba} = f\,(\theta_a, \theta_b, \Delta, ab$ بارگذاری روی دهانه)

با استفاده از سوپر پوزیشن اثر تک تک پارامترهای فوق را به صورت جداگانه بررسی میکنیم.

θ چرخش هر نقطه از تیر اصلی = برش درهمان نقطه از تیر مزدوج

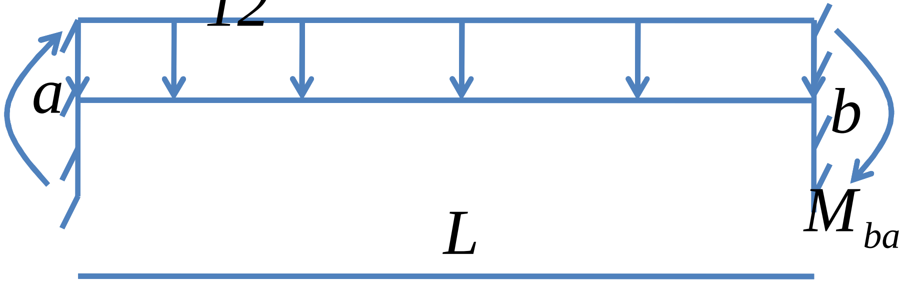
Δ خیز هر نقطه از تیر اصلی = لنگر در همان نقطه از تیر مزدوج

قرارداد علامت مثبت:

- لنگر و چرخش ساعتگرد باشد مثبت
- اگر وتر ab در جهت عقربه های ساعت بچرخد، Δ مثبت است

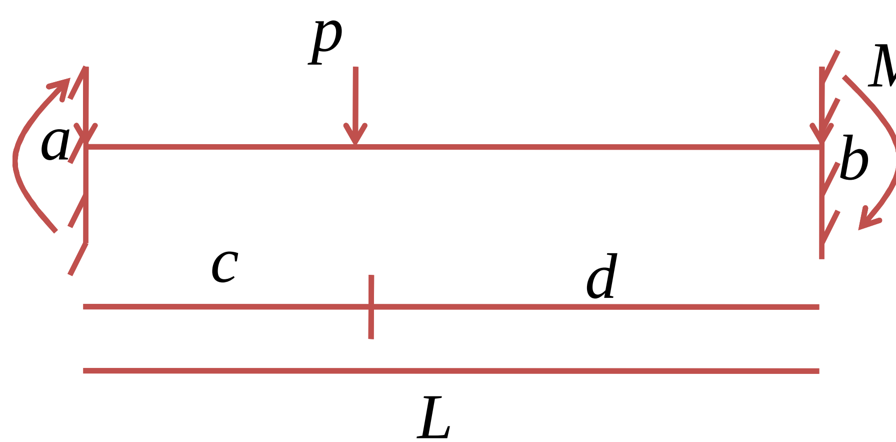
لنگرهای انتهایی گیردار با بارگذاری وسط دهانه

$$M_{ab} = -\frac{wL^2}{12}$$



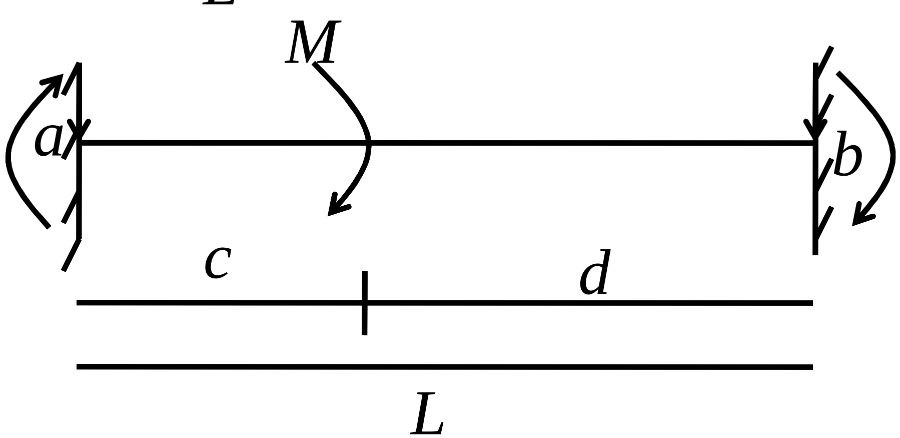
$$M_{ba} = \frac{wL^2}{12}$$

$$M_{ab} = -\frac{pcd^2}{L^2}$$



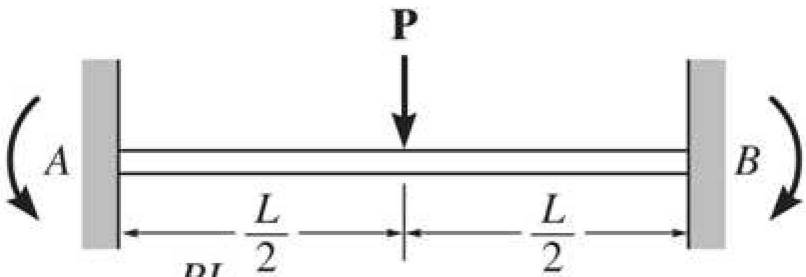
$$M_{ba} = \frac{pc^2 d}{L^2}$$

$$M_{ab} = -\frac{pd\left(2c-d\right)}{L^2}$$

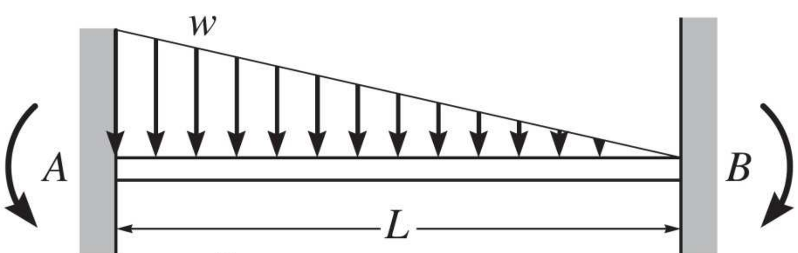


$$M_{ba} = -\frac{pc\left(2d-c\right)}{L^2}$$

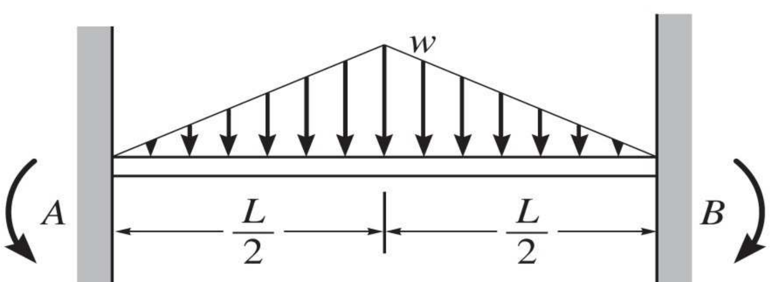
لنگر های گیرداری انتها FEM



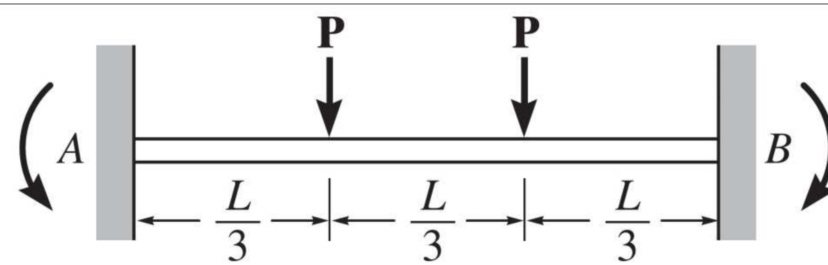
$(\text{FEM})_{AB} = \dfrac{PL}{8}$ $\qquad$ $(\text{FEM})_{BA} = \dfrac{PL}{8}$



$(\text{FEM})_{AB} = \dfrac{wL^2}{20}$ $\qquad$ $(\text{FEM})_{BA} = \dfrac{wL^2}{30}$



$(\text{FEM})_{AB} = \dfrac{5wL^2}{96}$ $\qquad$ $(\text{FEM})_{BA} = \dfrac{5wL^2}{96}$



$(\text{FEM})_{AB} = \dfrac{2PL}{9}$ $\qquad$ $(\text{FEM})_{BA} = \dfrac{2PL}{9}$

در حالت کلی داریم:

$$M_{ab} = M'_{ab} + M''_{ab} + M'''_{ab} + M^F_{ab}$$

$$M_{ba} = M'_{ba} + M''_{ba} + M'''_{ba} + M^F_{ba}$$

معادلات اصلی شیب افت:

$$\rightarrow$$

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}\right) + M^F_{ab}$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_b + \theta_a - \frac{3\Delta}{L}\right) + M^F_{ba}$$

ضریب سختی $K = \frac{I}{L}$

ضریب چرخش $R = \frac{\Delta}{L}$

مراحل تحلیل به روش شیب افت:

1) تشخیص آنکه سازه دارای حرکت جانبی می باشد یا نمی باشد (محاسبه تعداد درجات آزادی سازه).

ابتدا تمام گره ها تبدیل به لولا میشوند آنگاه با استفاده از رابطه زیر، به محاسبه تعداد در حات آزادی مستقل سازه میپردازیم.

$$n=(3m+r)-(3j+c)$$

$$n=m+r-2j$$

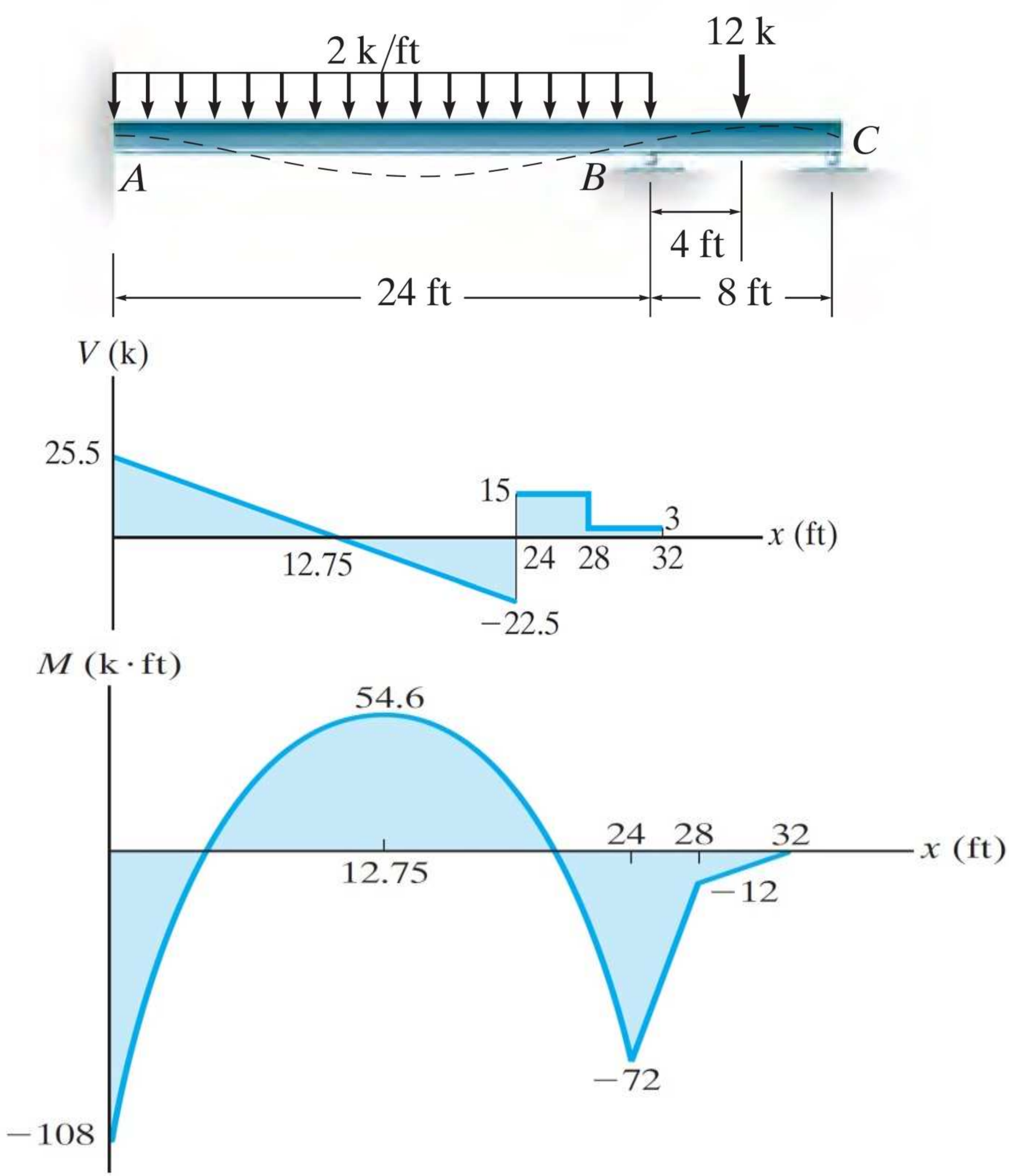
2) رسم تغییر شکل صحیح سازه، در صورت وجود تغییر مکان در سازه

3) نوشتن معادلات شیب-افت برای کلیه اعضای سازه

4) استفاده از ساده ترین معادلات تعادل استاتیکی $\longleftarrow$ منجر به محاسبه تغییرشکل ها میشود

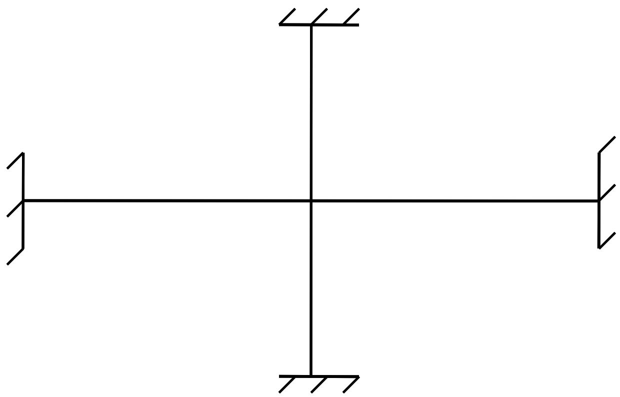
5) لنگرهای انتهایی اعضا محاسبه میشوند و سازه معین میگردد.

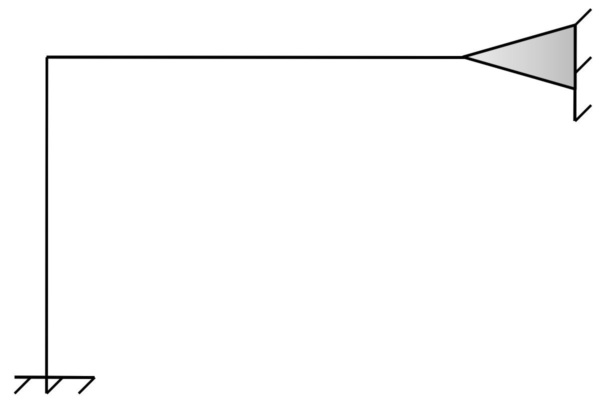
مثال ۱:

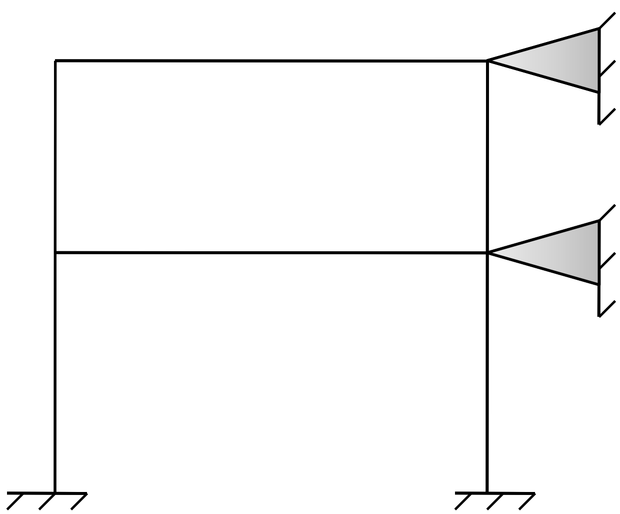


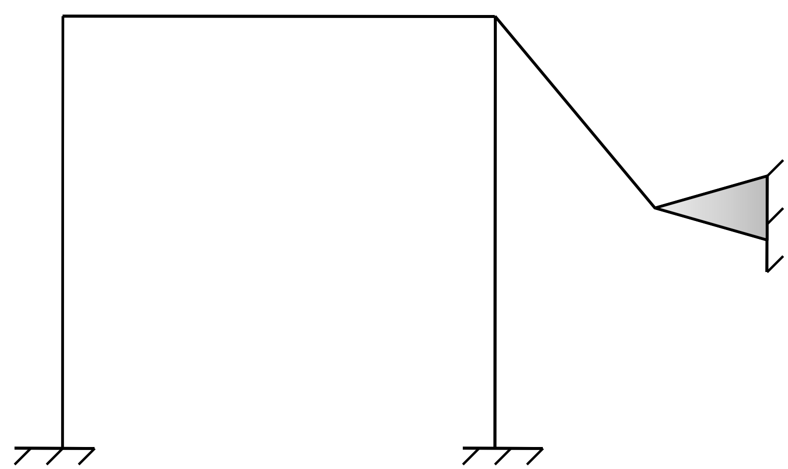
2 k/ft
12 k
A
B
C
4 ft
24 ft
8 ft
V (k)
25.5
15
3
x (ft)
12.75
24
28
32
−22.5
M (k · ft)
54.6
24
28
32
x (ft)
12.75
−12
−72
−108

سازه های نامعین بدون حرکت جانبی:

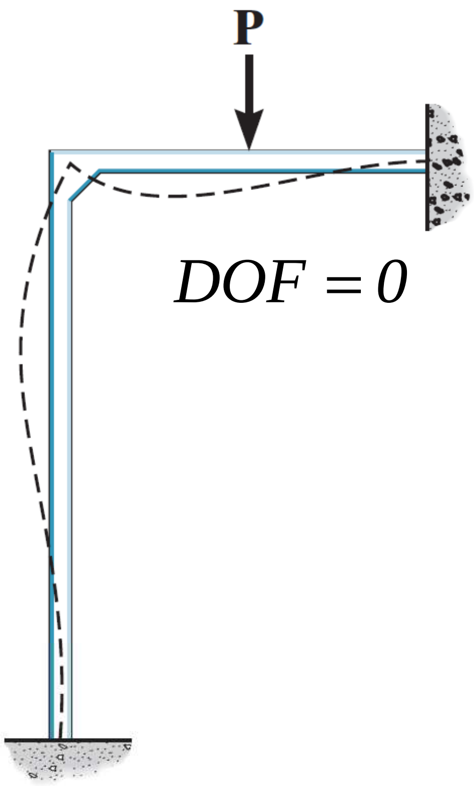


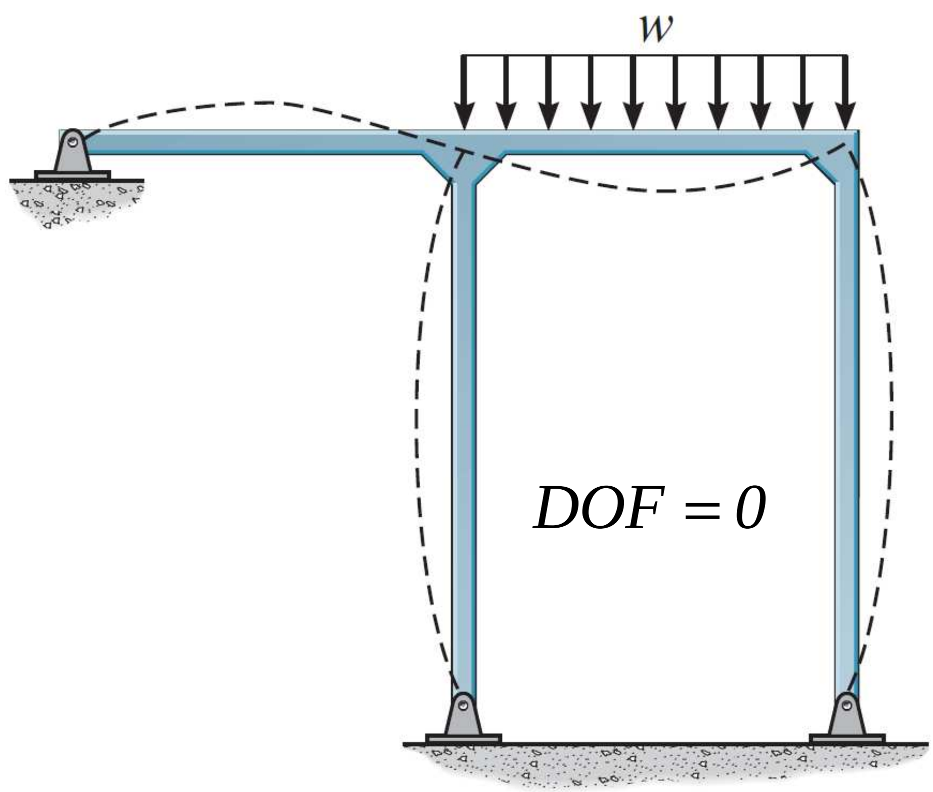




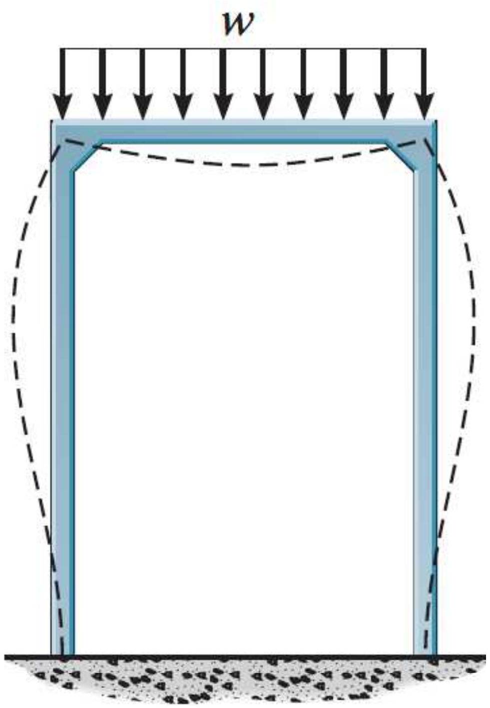


روش شیب- افت برای تحلیل قاب های بدون حرکت جانبی

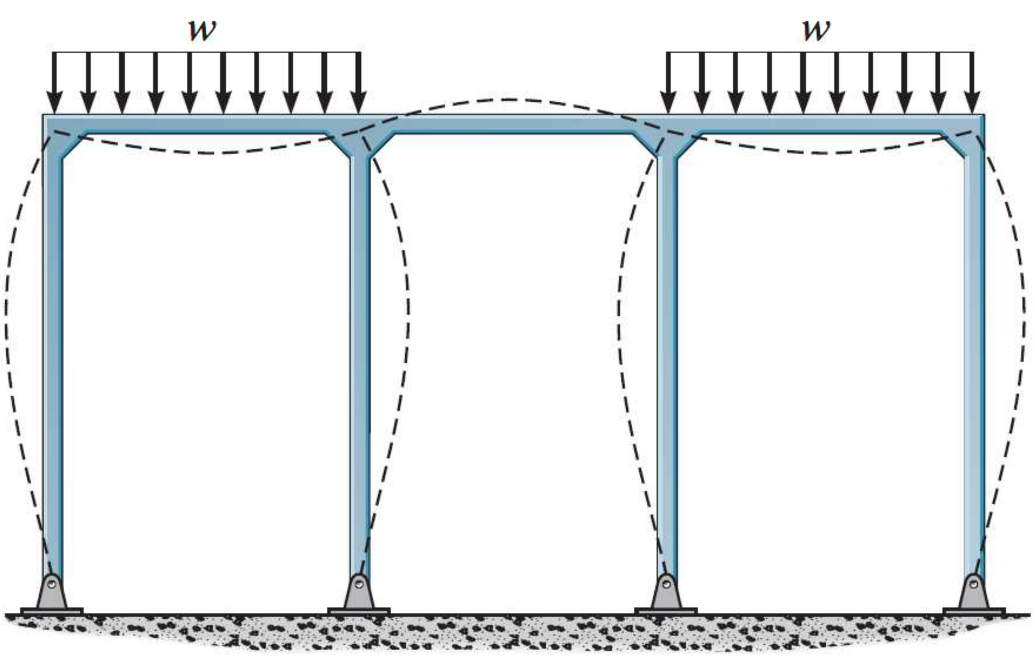




روش شیب- افت برای تحلیل قاب های بدون حرکت جانبی



$DOF = 0$

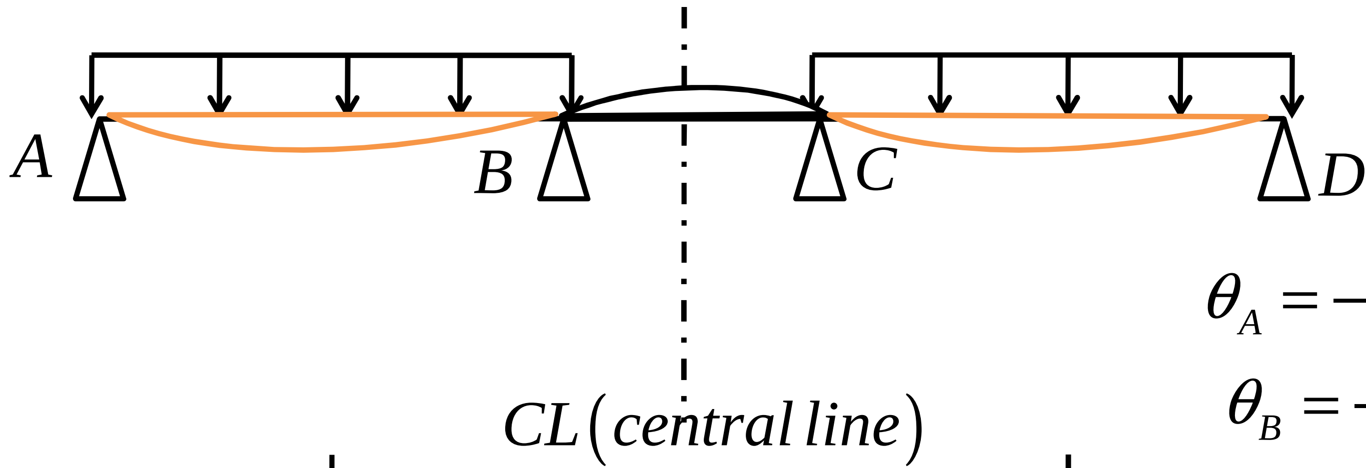


$DOF = 0$

تقارن

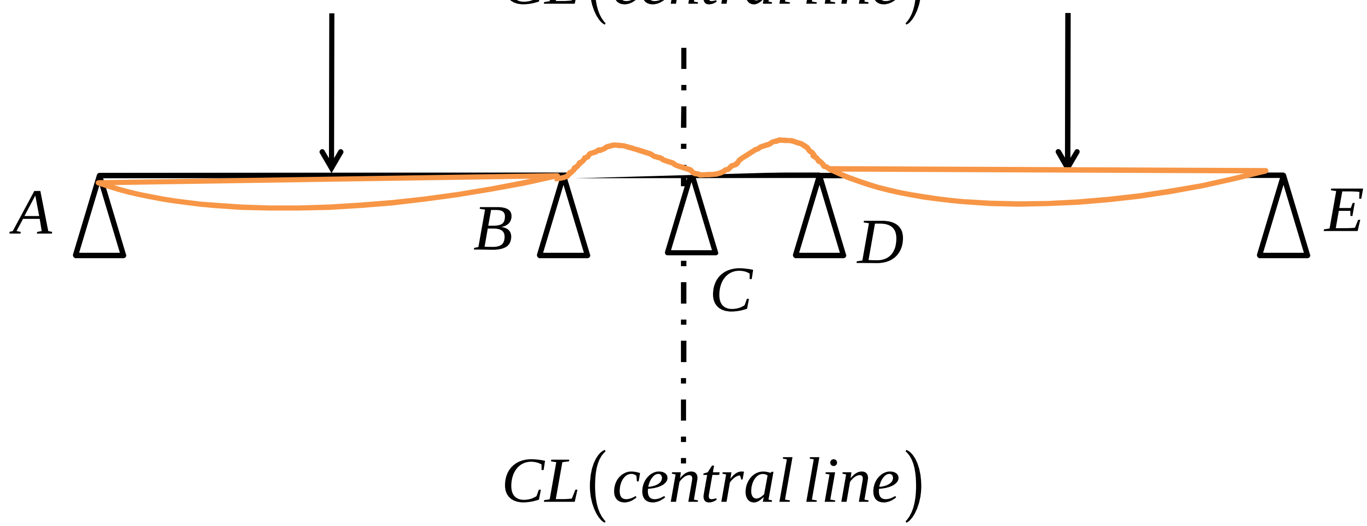
اگر از محور تقارن استفاده کنیم، روند تحلیل مساله نصف میشود.

نکته: در تقارن، چرخش ها و لنگرها با علامت مخالف برابرند (قرینه یکدیگر می باشند)



$$\theta_A = -\theta_D$$

$$\theta_B = -\theta_C$$

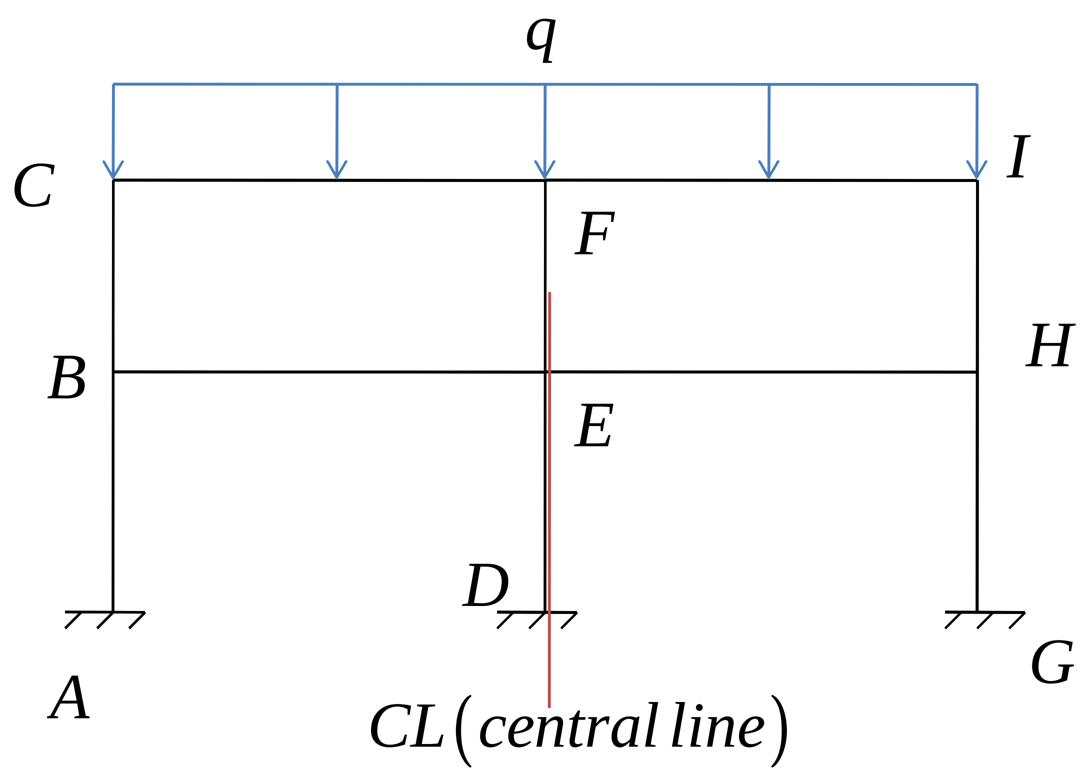


$$\theta_A = -\theta_E$$

$$\theta_B = -\theta_D$$

$$\theta_C = 0.0$$

تقارن



$$\theta_B = -\theta_H$$

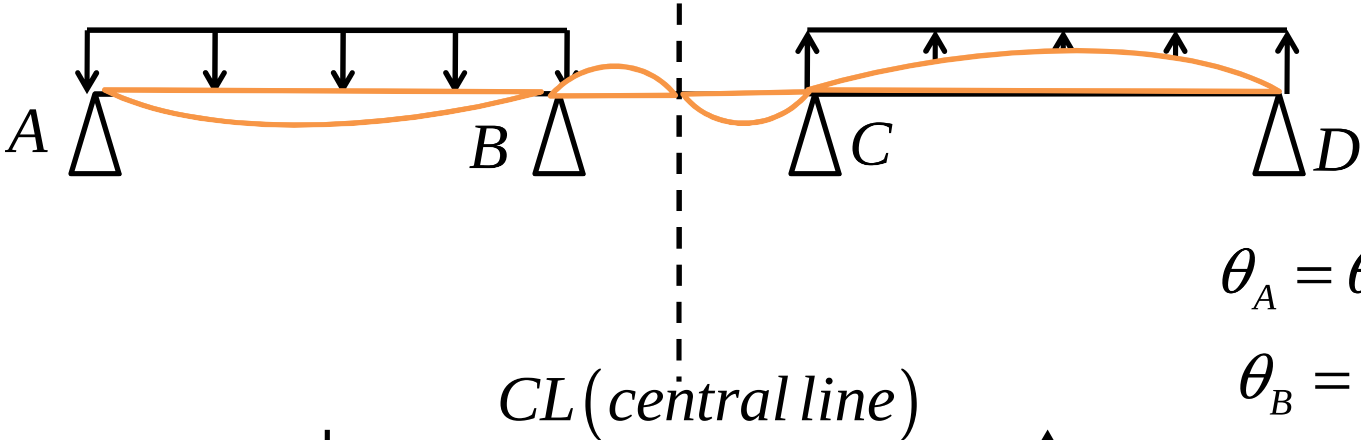
$$\theta_C = -\theta_I$$

$$\theta_D = \theta_E = \theta_F = 0.0$$

پادتقارن

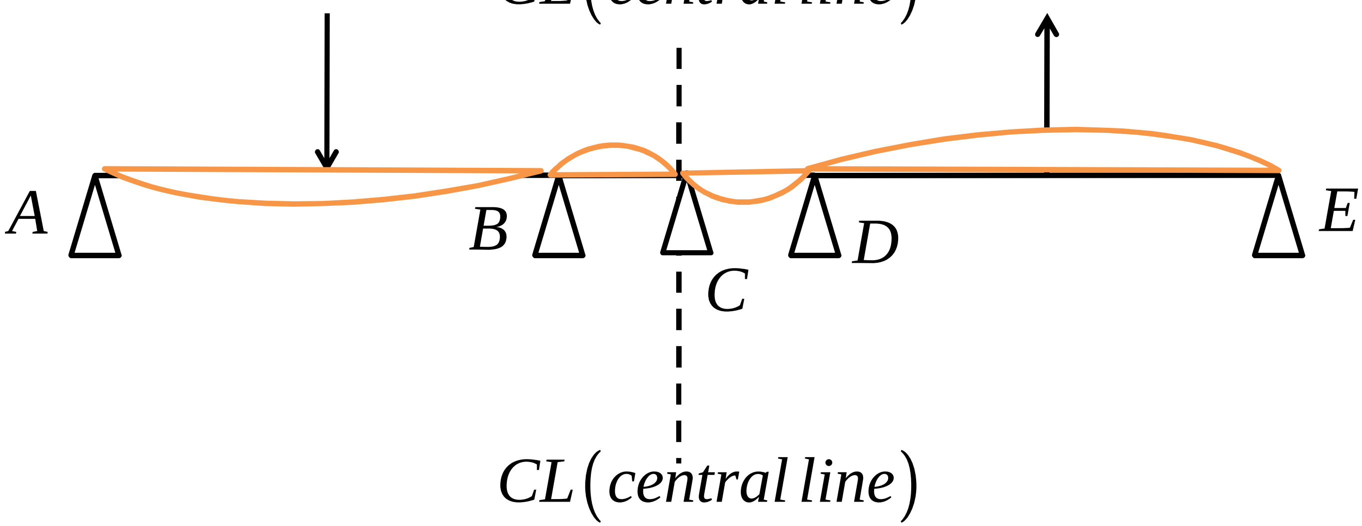
سازه باید به صورت متقارن باشد ولی بارگذاری می تواند ضد تقارن (تقارن معکوس) باشد.

نکته: در پادتقارن، چرخش ها و لنگرها در نقاط متناظر با یکدیگر مساوی اند.



$$\theta_A = \theta_D$$

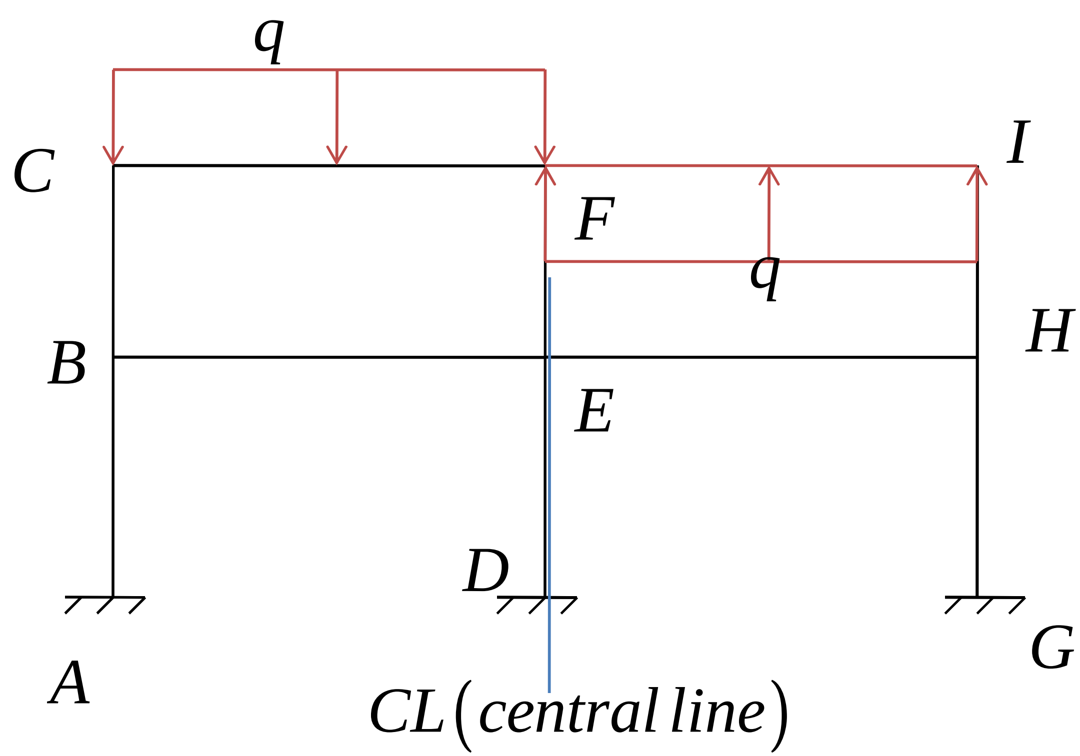
$$\theta_B = \theta_C$$



$$\theta_A = \theta_E$$

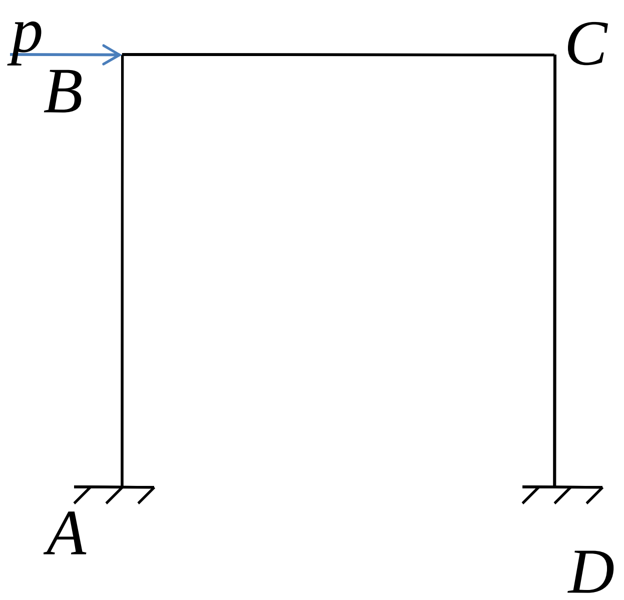
$$\theta_B = \theta_D$$

پادتقارن



$$\theta_B = \theta_H$$

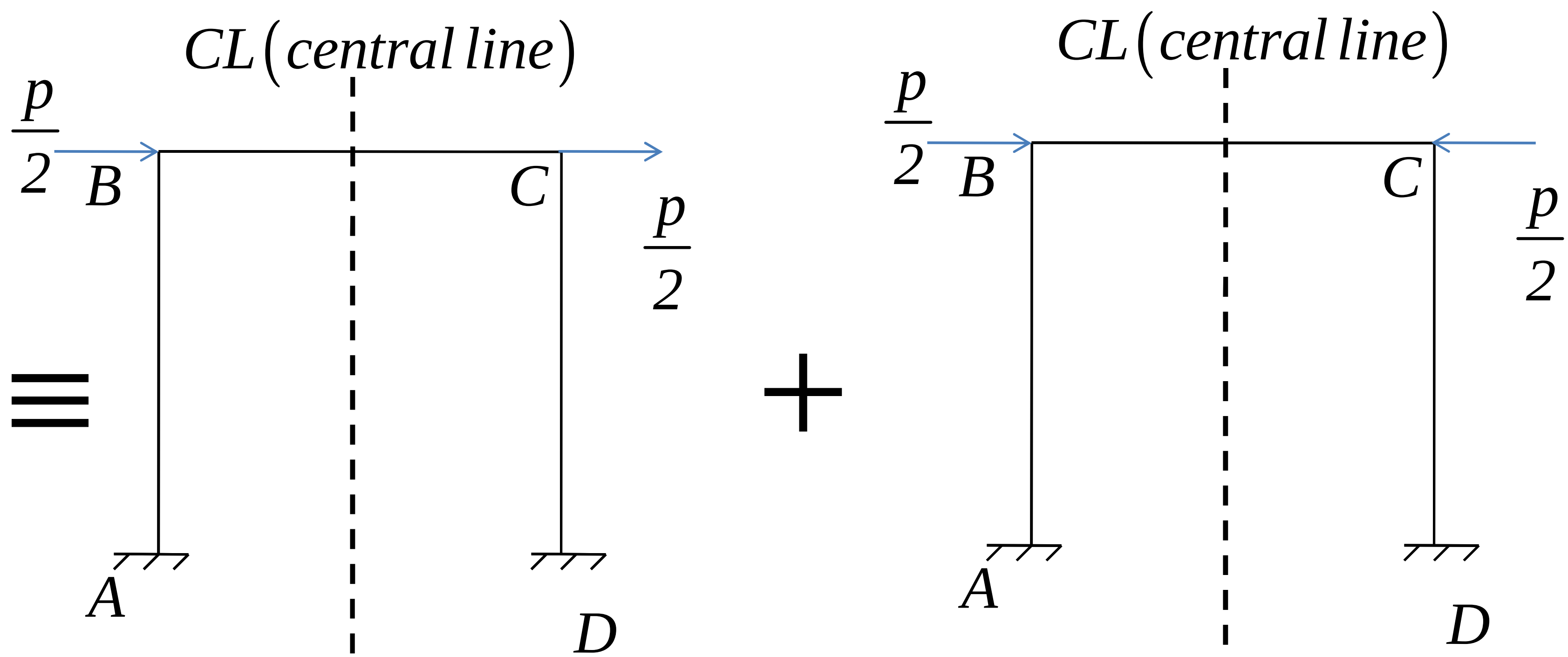
$$\theta_C = \theta_I$$



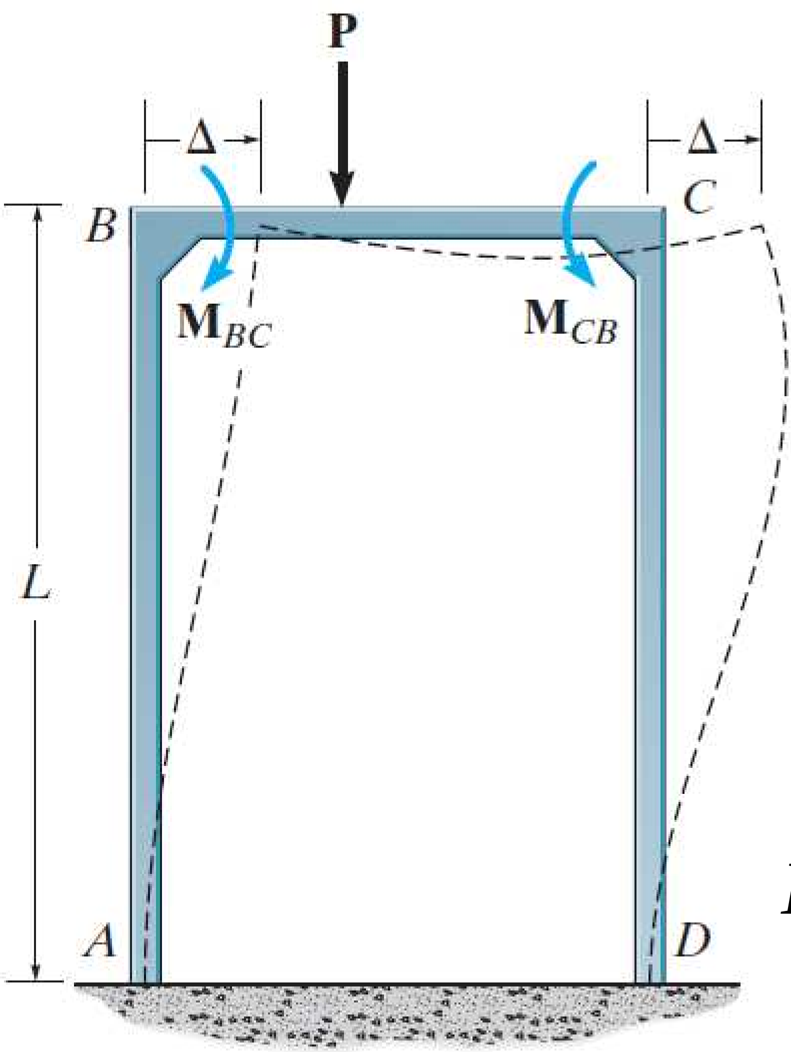
$$M_{ab} = M_{dc}, \quad M_{ba} = M_{cd},$$

$$M_{bc} = M_{cb}$$

$$\theta_B = \theta_c$$



روش شیب- افت برای تحلیل قاب های با حرکت جانبی



نکته: با توجه به فرض عدم تغییرشکل محوری سازه دارای یک درجه آزادی است

$$DOF = 1$$

روش پخش لنگر در تحلیل تیرها و قاب های صلب نامعین استاتیکی (بدون انتقال گره):

مقدمه:

روش پخش لنگر که در سال ۱۹۳۲ توسط شخصی به نام هاردی کراس ابداع شد. معمولاَ برای تحلیل تمام انواع تیرها و قاب های صلب نامعین که در آنها عمدتاٌ تغییرشکل ناشی از لنگر خمشی است استفاده میشود. روش پخش لنگر اساساً بر اساس معادلات شیب افت می باشد. همانطور که در روش شیب افت گفته شد. لنگر موجود در انتهای یک عضو جمع جبری چهار اثر زیر می باشد.

1) لنگر ناشی از بارگذاری روی دهانه عضو اگر عضو را به صورت دو سر گیردار در نظر بگیریم. (FEM)
2) لنگر ناشی از چرخش انتهای نزدیک در حالی که انتهای دور گیردار باشد
3) لنگر ناشی از چرخش انتهای دور در حالی که انتهای نزدیک گیردار باشد
4) لنگر ناشی جابه جایی نسبی بین دو انتهای عضو

قبل از بررسی روش پخش لنگر لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم:

1) Stiffness — سختی

2) Distributed Factor (D.F) — ضریب توزیع

3) Carry Over Factor (C.O.F) — ضریب انتقال

کاربرد روش پخش لنگر

از روش پخش لنگر می توان در سازه هایی که متشکل از اعضاء منشوری یا غیر منشوری باشد با یا بدون انتقال گره استفاده کرد.

لنگر انتهایی و چرخش عضو در جهت عقربه های ساعت مثبت می باشد.

خلاصه ای از جبر ماتریسی برای مهندسین سازه

فایده جبر ماتریسی در تحلیل خطی سازه از دو دلیل است

۱- جبر ماتریسی یک وسیله ریاضی بسیار راحت برای بیان تئوری تحلیل سازه می باشد

۲- با استفاده از کامپیوترهای پر سرعت حل معادلات ماتریسی بسیار سریع و راحت صورت میگیرد.

تعاریف ماتریسی

یک ماتریس عبارت است از یک آرایش مستطیلی از اجزاء که به صورت سطر و ستون نمایش داده شود.

مرتبه یک ماتریس اندازه آن را نشان می دهد. بدین معنی که یک ماتریس شامل m سطر و n ستون می باشد. که به صورت $m\times n$ نیز نشان داده میشود.

سطر ستون

$$A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

خلاصه ای از جبر ماتریسی برای مهندسین سازه

المانهای یک ماتریس میتواند هر چیزی باشد (عدد، بردارها، توابع جبری یا هر کمیت دیگری)

ماتریس به عبارتی شکل نمایش اجزاء می باشد. و هیچ گونه رابطه ای را بین آنها نشان نمیدهد.

انواع ماتریسی

۱) ماتریس سطری

$$A=\left[a_{1j}\right]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\end{bmatrix}_{1\times n}$$

۲) ماتریس ستونی

$$A=\left[a_{i1}\right]=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

انواع ماتریسی

۳) ماتریس صفر یا تهی (Null)

$$Null = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

۴) ماتریس ترانسپوز (ترانهاده، Transpose)

در صورتی که جای سطر و ستون عوض شود؛ ماتریس ترانهاده ایجاد میشود.

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{bmatrix}_{3\times3} , \quad A^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix}_{3\times3} , \quad A = \left(A^T\right)^T$$

۵) ماتریس مربعی

تعداد سطر و ستون آن با یکدیگر یکسان باشد $n\times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times3}$$

انواع ماتریس مربعی

۱) ماتریس قطری

یک ماتریس مربعی است که کلیه اجزای غیرواقع روی قطر اصلی ان صفر باشد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس واحد

یک ماتریس قطری است که کلیه عناصر واقع بر قطر اصلی، آن یک باشد.

نکته: ماتریس واحد همان کاربرد عدد یک را در جبر معمولی انجام میدهد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad or \quad \begin{Bmatrix} if\ i=j \rightarrow a_{ij}=1.0 \\ if\ i\neq j \rightarrow a_{ij}=0 \end{Bmatrix}$$

۵) ماتریس متقارن

ماتریس مربعی میباشد که اجزاء آن نسبت به قطر اصلی متقارن است

نکته: در ماتریس متقارن ترانسپوز با خود ماتریس برابر است.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & l \end{bmatrix}_{3\times 3}, \qquad A^T=A \quad \& \quad a_{ij}=a_{ji}$$

انواع ماتریس مربعی

۱) ماتریس تقارن معکوس

یک ماتریس مربعی است که اجزاء متناظر نسبته به قطر اصلی قرینه و قطر اصلی صفر باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} ,\begin{Bmatrix} a_{ij}=-a_{ji} \\ a_{ii}=0.0 \end{Bmatrix}$$

۴) ماتریس مثلثی

ماتریس مربعی میباشد که اجزاء یک طرف قطر اصلی آن همگی صفر باشد؛ در دو حالت زیر نیز دسته بندی میشود

الف) بالا مثلثی

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & d \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ب) پایین مثلثی

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & e & 0 \\ c & d & l \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

تساوی، جمع، تفاضل و ضرب عددی در ماترسی ها

دو ماتریس هنگامی مساوی اند که:

اولاً تعداد سطر و ستون هایشان با یکدیگر مساوی باشد.

ثانیاً اجزاء نظیر به نظیرشان با یکدیگر برابر باشد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \& \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\rightarrow A=B \;\; If \quad a_{ij}=b_{ij}$$

جمع و تفاضل دو ماتریس

هر دو ماتریس هم مرتبه را میتوان با یکدیگر جمع و یا از همدیگر کم کرد؛ به عبارتی اجزاء نظیر با یکدیگر جمع یا از یکدیگر کسر میشوند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \& \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A+B=B+A=a_{ij}+b_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

تساوی، جمع، تفاضل و ضرب عددی در ماترسی ها

نکته: هر ماتریس مربعی را میتوان از جمع دو ماتریس متقارن یا تقارن معکوس بدست آورد.

$$A=\underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{\text{ماتریس متقارن}}+\underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{\text{ماتریس معکوس}}$$

حاصل ضرب یک عدد در یک ماتریس

آن عدد در کل اعداد ماتریس ضرب می شود.

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

حاصلضرب ماتریس ها

$$\begin{cases} A=(p\times q) \\ B=(q\times r) \end{cases}\rightarrow A_{(p\times q)}\times B_{(q\times r)}=C_{(p\times r)}$$

$$A\times B=B\times A\rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \& \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B\times A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوی، جمع، تفاضل و ضرب عددی در ماترسی ها

نکته: در جبر معمولی xy=0 اگر x=0 یا y=0 ولی در جبر ماتریسی اینگونه نیست

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \& \quad B=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پارتیشن بندی ماتریس:

$$A=\left[a_{ij}\right]=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ \hdashline a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right]=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

تساوی، جمع، تفاضل و ضرب عددی در ماترسی ها

ترانهاده حاصلضرب:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

چند نکته در مورد ضرب و جمع ماتریس ها

$$ABC = A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB + BC$$

$$AI = IA = A$$

$$A[0.0] = [0.0]A = [0.0] = Null$$

معکوس ماتریس:

در ماتریس ها عمل تقسیم وجود ندارد؛ عمل تقسیم توسط معکوس ماتریس صورت میگیرد، به عنوان مثال

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، میتوان یک ماتریس مربعی دیگر پیدا کرد B به قمسی که $A \times B$ برابر

واحد باشد. به شرط آنکه ماتریس A غیر منفرد باشد، یعنی $det[A] \neq 0$ باشد؛ در این حالت B را

معکوس ماتریس A گویند و با A^{-1} نشان میدهند

$$A \times B = A \times \frac{1}{A} = A \times A^{-1} = I$$

$$det[A] \neq 0.0$$

تعیین معکوس یک ماتریس

۱) تعیین دترمینال ماتریس A

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad det[A] = |A|$$

۲) تعیینماینور m_{ij} :

دترمینال حاصل از حذف سطر iام و ستون jام، دترمینال A $= m_{ij}$

۳) تعیین کوفاکتور $\overline{a}_{ij}$

$$\overline{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$$

۴) تعییت کوفاکتور ماتریس A

$$Co(A) = \overline{A} = \left[\overline{a}_{ij}\right] = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \overline{a}_{13} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \overline{a}_{23} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \overline{a}_{31} & \overline{a}_{32} & \overline{a}_{33} & \cdots & \overline{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \overline{a}_{m3} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{vmatrix}$$

۵) تعیین ترانسفور A (Adjoint)

$$Adj(A) = \left(\overline{A}\right)^T$$

۶) معکوس برابر میشود با

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

تعیین معکوس یک ماتریس

نکته: معکوس یک ماتریس منحصر به فرد است

نکته: معکوس ترانهاده یک ماتریس برابر است با ترانهاده معکوس یک ماتریس

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

$$\left(ABC\right)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}, \qquad \left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

نکته معکوس یک ماتریس متقارن، متقارن خواهد شد.

حل معادلات خطی همزمان

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \cdots + a_{3n}X_n &= b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرائب A}}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

ماتریس معلومات

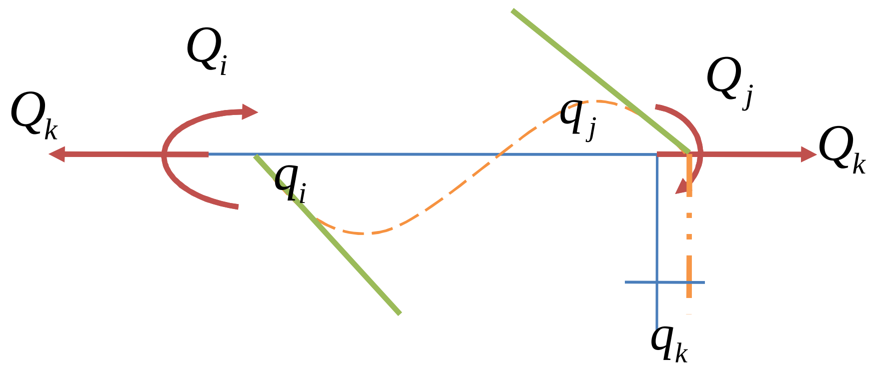
بردار مجهولات

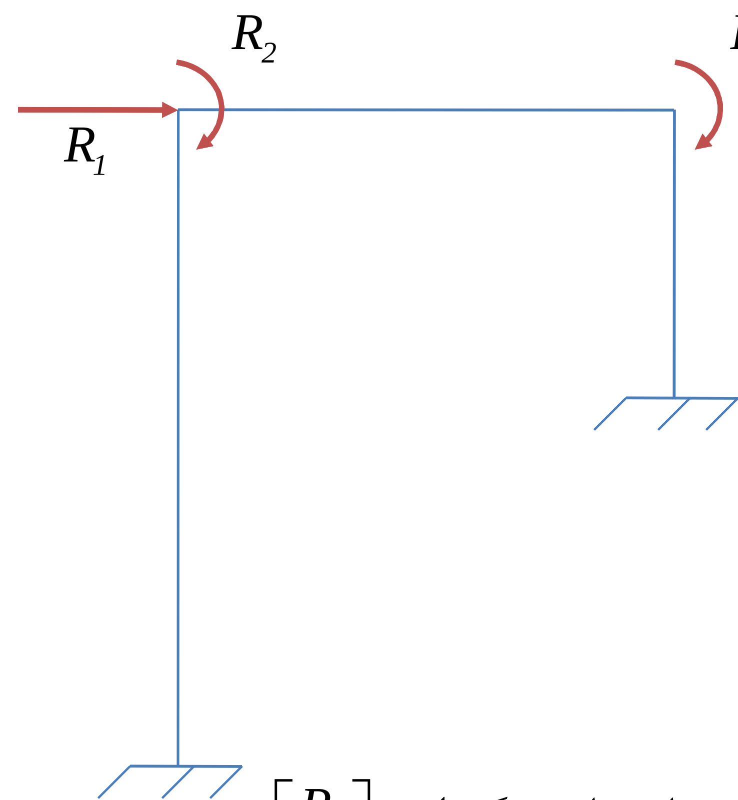
$$\rightarrow A \times X = b \rightarrow X = A^{-1} \times b$$

فصل شانزدهم

آنالیز ماتریسی سازه ها:

قرارداد علامت در آنالیز ماتریسی





مجهولات (جابه جایی)	مجهولات (نیرویی)
q_i	Q_i
q_j	Q_j
q_k	Q_k

بردار تغییر مکان های گره ای متناظر

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

بردار نیروهای خارجی گره ای

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_i^a \\ Q_j^a \\ Q_k^a \\ Q_i^b \\ Q_j^b \\ Q_k^b \\ Q_i^c \\ Q_j^c \\ Q_k^c \\ \vdots \end{bmatrix}$$

بردار نیروهای
داخلی انتهایی اعضا

$$q = \begin{bmatrix} q_i^a \\ q_j^a \\ q_k^a \\ q_i^b \\ q_j^b \\ q_k^b \\ q_i^c \\ q_j^c \\ q_k^c \\ \vdots \end{bmatrix}$$

بردار تغییرمکان های
داخلی متناظر اعضا

در اثر تغییر شکل سازه، نیروهای خارجی گره ای کار انجام دهند، که کار ناشی از نیروهای خارجی بصورت زیر نوشته میشود.

$$W_E = R^T r = r^T R$$

با توجه به تغییرشکل های داخلی سازه، میتوان کار داخلی انجام گرفته توسط اعضا را به شکل زیر حساب کرد.

$$W_i = Q^T q = q^T Q$$

نکته: اگر سازه الاستیک باشد، نیروهای داخلی در سازه ذخیره میشود.

اگر از اتلاف انرژی بصورت حرارت و صوت صرفنظر کنیم، کار داخلی با کار خارجی برابر است

$$W_i = W_E$$

در روش کار مجازی ممکن است یک تغییرمکان مجازی برای آن در نظر بگیریم یا آنکه ممکن است یک سری نیروی مجازی روی سازه اعمال کنیم در این جالت برای نشان دادن مجازی بودن این پارامترها از یک علامت خط تیره بالا آن پارامتر استفاده میکنیم.

$$R^T r = Q^T q, \qquad r^T R = q^T Q$$

$$\bar{R}^T r = \bar{Q}^T q, \qquad \bar{r}^T R = \bar{q}^T Q$$

ماتریس تبدیل نیرو

برای سازه ی معین استاتیکی هر یک از نیروهای عضو را میتوان بر حسب بارهای خارجی گره ای با استفاده از معادلات تعادل نوشت

نیروهای انتهایی داخلی اعضا

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = b_{11}R_1 + b_{12}R_2 + b_{13}R_3 + \cdots + b_{1n}R_n, \qquad Q_1 = Q_i^a \\
&Q_2 = b_{21}R_1 + b_{22}R_2 + b_{23}R_3 + \cdots + b_{2n}R_n, \qquad Q_2 = Q_j^a \\
&Q_3 = b_{31}R_1 + b_{32}R_2 + b_{33}R_3 + \cdots + b_{3n}R_n, \qquad Q_{13} = Q_k^a \rightarrow \; Q = bR \\
&\;\;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&Q_n = b_{m1}R_1 + b_{m2}R_2 + b_{m3}R_3 + \cdots + b_{mn}R_n,
\end{aligned}
$$

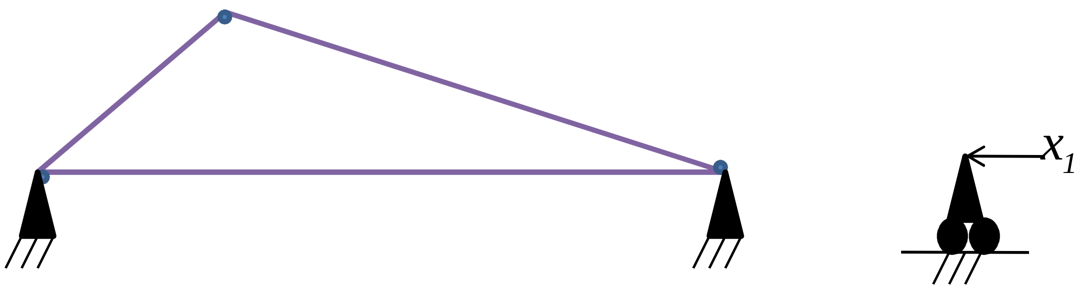
ماتریس تبدیل نیرو (بیانگر تعادل سیستم)

$$
b = \begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn}
\end{bmatrix}
$$

ماتریس تبدیل نیرو برای سازه های نامعین استاتیکی

اگر سازه نامعین باشد به مقدار نامعینی نیروهای مجهول به جای درجات نامعینی قرار میدهیم.

در نتیجه، در سازه های نامعین استاتیکی، ابتدا لازم است نیروهای اضافی که باعث نامعینی شده است را در نظر بگیریم و آنها را بصورت بارهای گره ای مجهول فرض کنیم، لذا رابطه ی به صورت زیر نوشته می شود.



Q بردار نیروهای داخلی اعضا

b_R ماتریس تبدیل نیرو

R بردار نیروهای خارجی

b_x بردار نیروهای اضافی

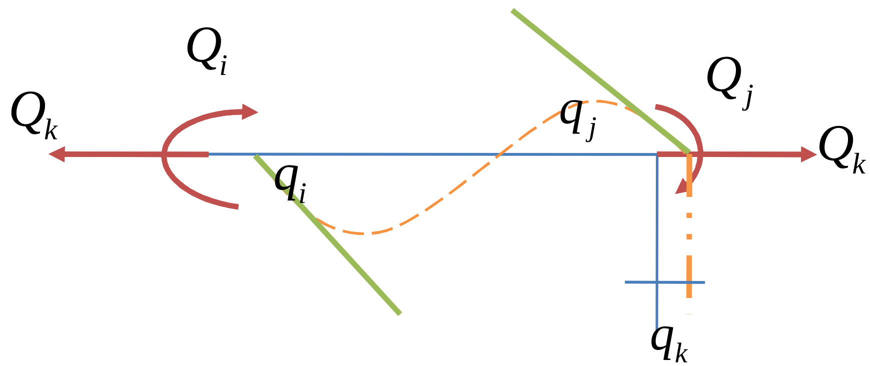
X ماتریس تبدیل نیرو برای نیروهای خارجی گره ای موجود

$$Q = b_R R + b_x X$$

$$[Q] = [b_R \quad b_x]\begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix}$$

رابطه نیرو-تغییرمکان-ضریب انعطاف پذیری و ماتریس انعطاف پذیری

قابت



$$Q^a = \begin{bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{bmatrix} \qquad q^a = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{bmatrix}$$

خرپا

$$Q^a = [Q_k] \qquad q^a = [q_k]$$

$$q_i^a = f_{ii}^a Q_i^a + f_{ij}^a Q_j^a + f_{ik}^a Q_k^a$$
$$q_j^a = f_{ji}^a Q_i^a + f_{jj}^a Q_j^a + f_{jk}^a Q_k^a$$
$$q_k^a = f_{ki}^a Q_i^a + f_{kj}^a Q_j^a + f_{kk}^a Q_k^a$$

$$q^a = f^a Q^a, \qquad f^a = \begin{bmatrix} f_{ii}^a & f_{ij}^a & f_{ik}^a \\ f_{ji}^a & f_{jj}^a & f_{jk}^a \\ f_{ki}^a & f_{kj}^a & f_{kk}^a \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق واضح است که

$$f_{ii}^{a} = q_{i}^{a} \quad if \quad Q_{i}^{a} = 1.0, \qquad Q_{j}^{a} = 0.0, \quad Q_{k}^{a} = 0.0$$

$$\begin{aligned} q^{a} &= f^{a} Q^{a} \\ q^{b} &= f^{b} Q^{b} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ q &= fQ \end{aligned}$$

بردار نیروهای
داخلی انتهایی اعضا

$$Q = \begin{bmatrix} Q^{a} \\ Q^{b} \\ \vdots \\ Q^{m} \end{bmatrix}$$

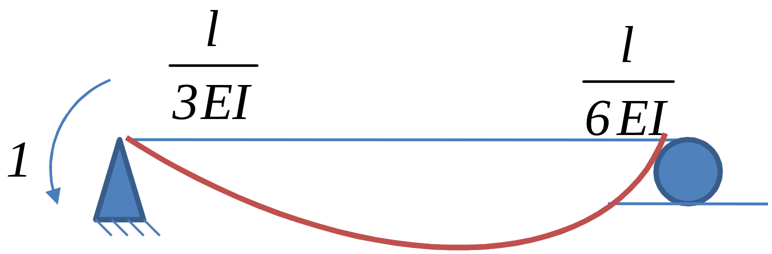
بردار تغییرمکان های
داخلی متناظر اعضا

$$q = \begin{bmatrix} q^{a} \\ q^{b} \\ \vdots \\ q^{m} \end{bmatrix}$$

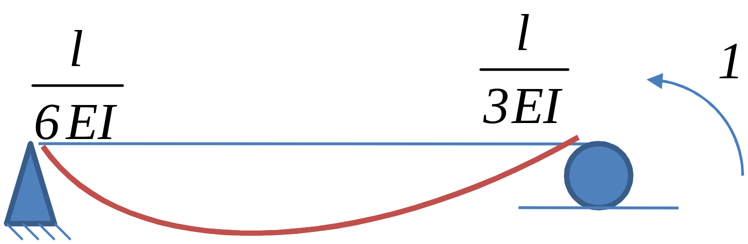
$$f = \begin{bmatrix} f^{a} & 0 & 0 \\ 0 & f^{b} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

تعیین ماتریس انعطاف پذیری عضو

الف) عضو خمشی (تیر یا قاب)



$$f_{ii}^{a} = \frac{l}{3EI}, \qquad f_{ji}^{a} = -\frac{l}{6EI}, \qquad f_{ki}^{a} = 0.0$$



$$f_{ii}^{a} = -\frac{l}{6EI}, \qquad f_{ji}^{a} = \frac{l}{3EI}, \qquad f_{ki}^{a} = 0.0$$

$$f_{ii}^{a} = 0.0, \qquad f_{ji}^{a} = 0.0, \qquad f_{ki}^{a} = \frac{l}{AE}$$

تعیین ماتریس انعطاف پذیری عضو

الف) عضو خمشی (تیر یا قاب)

$$f^a = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} & 0 \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{AE} \end{bmatrix}$$

نکته: از آنجا که تغییر شکل یک قاب بیشتر ناشی از لنگر خمشی است و نیروهای محوری اثر کمی در تغییر شکل سازه دارد، میتوان از اثر نیروی محوری صرفنظر کرد، و ماتریس انعطاف پذیر عضو را به صورت زیر ساده کرد.

$$f^a = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}$$

ب) عضو خرپایی:

ماتریس انعطاف پذیر عضو خرپایی

$$f^a = \left[\frac{l}{AE} \right]$$

مراحل تحلیل سازه های معین استاتیکی به روش نیرو

۱) تعریف بردار نیروهای خارجی گره ای (R)

۲) تعریف بردار نیروهای داخلی اعضا (Q)

۳) تعیین ماتریس تبدیل نیرو (b)

۴) تعیین بردار نیروهای داخلی اعضا $Q = bR$

۵) تعیین ماتریس انعطاف پذیری اعضا (تک تک اعضا) و مونتاژ آنها جهت تعیین ماتریس انعطاف پذیری آنها

$$f = \begin{bmatrix} f^a & 0 & 0 \\ 0 & f^b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

۶) تعیین ماتریس انعطاف پذیری کل $F = b^T f b$

۷) تعیین بردار تغییر مکان های گره ای

$$r = FR$$

سازه نامعین

در سازه های نامعین همان طور که گفته شد بایستی ابتدا درجه نامعین سازه مشخص شود، سپس بارهای اضافی تعیین گردد. در این حالت رابطه زیر را مینویسیم

$$Q = \begin{bmatrix} b_R & b_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix}$$

R بردار نیروهای خارجی گره ای

X بردار نیروهای خارجی اضافی

$$W_E = W_I$$

$$\bar{R}^T r + \bar{X}^T r_x = \bar{Q}^T q$$

$$q = FQ$$

$$q = f b_R R + f b_X X$$

$$\bar{R}^T r + \bar{X}^T r_x = \bar{R}^T \left(b_R^T f b_R R + b_R^T f b_X X \right) + \bar{X}^T \left(b_X^T f b_R R + b_X^T f b_X X \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} r = b_R^T f b_R R + b_R^T f b_X X \\ r_X = b_X^T f b_R R + b_X^T f b_X X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = F_{RR} R + F_{RX} X \\ r_X = F_{XR} R + F_{XX} X \end{cases}$$

$$F_{RR} = b_R^T f b_R, \quad F_{RX} = b_R^T f b_X, \quad F_{XR} = b_X^T f b_R, \quad F_{XX} = b_X^T f b_X$$

$$\begin{bmatrix} r \\ r_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{RR} & F_{RX} \\ F_{XR} & F_{XX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix}$$

سازه نامعین (حالت خاص)

الف) سازه بدون هیچ نشست تکیه گاهی

چون $r_x = 0.0$ است نتیجه میگیریم که میتوان بردار نیروهای اضافی را محاسبه کرد.

$$\begin{bmatrix} r \\ r_X = 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{RR} & F_{RX} \\ F_{XR} & F_{XX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}$$

$$\rightarrow F_{XR} \times R + F_{XX} \times X = 0.0 \rightarrow X = -F_{XX}^{-1} \times F_{XR} \times R \qquad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\boxed{1} \& \boxed{2}} r = \underbrace{\left(F_{RR} - F_{RX} \times F_{XX}^{-1} \times F_{XR} \right)}_{F'} R$$

$$F' = F_{RR} - F_{RX} \times F_{XX}^{-1} \times F_{XR}$$

ماتریس انعطاف پذیر سازه نامعین (بدون نشست تکیه گاهی)

$$Q = b_R \times R + b_X \times X$$

$$\rightarrow Q = \underbrace{\left(b_R - b_X F_{XX}^{-1} \times F_{XR} \right)}_{b'} R$$

$$b' = b_R - b_X \times F_{XX}^{-1} \times F_{XR}$$

بردار نیروهای خارجی $Q = b'R$ بردار مولفه های تکیه گاهی

ب) ماتریس انعطاف پذیری سازه نامعین را به شکل دیگر نیز میتوان نوشت

$$F' = b_R^T\, f b\,'$$

کنترل محاسبات:

$$b_X^T\, f b' = 0.0$$

کنترل محاسبات:

مراحل تحلیل ماتریس سازه نامعین

1) تعریف بردار بارهای خارجی گره ای R

۲) بردار نیروهای داخلی اعضا Q و بردار نیروهای گره ای اضافی X

۳) محاسبه b_R و b_X بر اساس تعادل

۴) تعیین ماتریس انعطاف پذیری تک تک اعضا $f^a, f^b, f^c, \dots$

$$f = \begin{bmatrix} f^a & 0 & 0 \\ 0 & f^b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

۵) محاسبه F_{XR}

$$F_{XR} = b_X^T f b_R$$

۶) محاسبه F_{XX}

$$F_{XX} = b_X^T f b_X$$

۷) محاسبه F_{XX}^{-1}

۸) تعیین بردار نیروهای اضافی $Q = b_R \times R + b_X \times X$

$$X = -F_{XX}^{-1} F_{XR} R \quad \rightarrow$$

۹)راحل دوم

$$b' = b_R - b_X \times F_{XX}^{-1} \times F_{XR}, \qquad Q = b' \times R$$

۱۰) محاسبه تغییر مکان ها

$$F' = b_X^T f b' \quad \rightarrow \quad r = F' R$$

آنالیز بار گسترده:

بررسی بار گسترده در آنالیز ماتریسی

در آنالیز ماتریسی همانطور که قبلاً بیان شد، بارگذاری بصورت بارهای متمرکز گره ای می باشد، و بارگذاری گسترده بصورت مستقیم نداریم، لذا برای تحلیل سازه های تحت اثر بار گسترده از در روش زیر میتوان استفاده کرد.

الف) بخشی از عضو که تحت اثر بارگسترده قرار دارد را میتوان به یک تعداد (ترجیحاً) مساوی تقسیم کرد و برای هر قسمت به جای بارگسترده نیروی متمرکز معادل ان را قرار دهیم، بنابراین مساله تبدیل به بارهای متمرکز میگردد.

بدهی است، هرچه تعداد تقسیمات بیشتر باشد، دقت مساله بیشتر میگردد ولی اشکال این روش آن است که غیر از تقریبی بودن حجم محاسبات نیز افزایش میگردد، زیرا تعداد گره ها افزایش می یابد.

ب)در این روش عضوی که تحت اثر بارگسترده می باشد را دو سر گیردار کرده به کمک جدول F.E.M لنگرهای انتهایی گیرداری رابدست آورده، عکس آن را روش سازه قرار میدهیم.بنابراین سازه تبدیل به سازه با بارهای گره ای شده که به روش ماتریسی قابل حل است، جواب های آن را با عضو دوسرگیردار تحت بارگسترده جمع میکنیم، مثال زیر روش کار را توضیح میدهد.