بسمه تعالی

تحلیل سازه ۱

مدرس:
محمد رضا سلطانی

منابع:

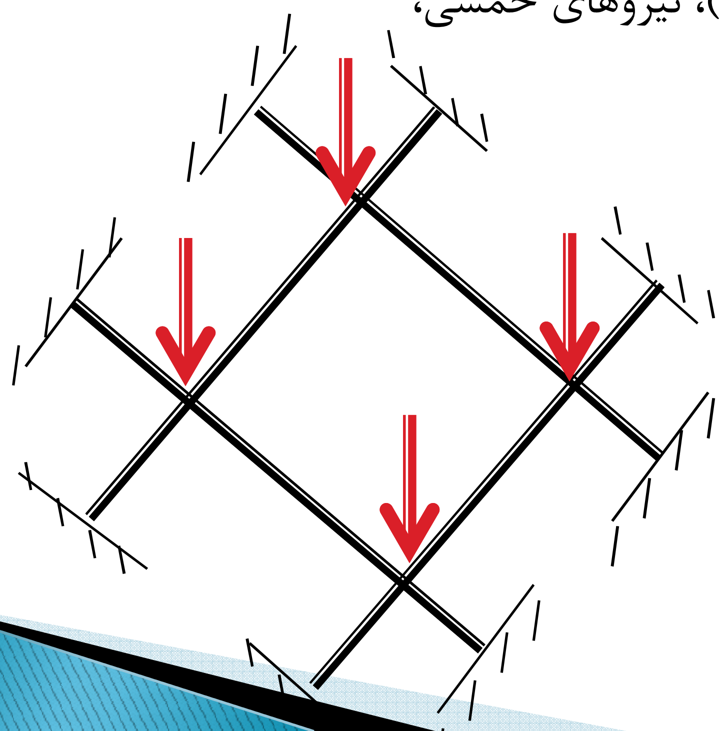
1) Elementary structural analysis, By: Norris & Wilber
2) Elementary theory of structures, By: Yuan Yu Hsieh
3) تحلیل سازه مترجم: محمدرضا اخوان لیل آبادی- شاپور طاحونی
4) مباحث بنیادی تحلیل سازه ها فریدون ایرانی

کوییز هر هفته شنبه صبح ساعت ۷:۳۰ الی ۷:۴۵ از مباحث بیان شده در هفته گذشته
امتحان میان ترم ۹۲/۰۵/۲۰ ساعت ۱۳:۰۰ کلاس ۲۵

سازه: مجموعه ای از اعضا که به شیوه مناسب بر هم متصل شده اند. و می توانند نیروهای مؤثر برخود را به طور مطمئن به تکیه گاه ها منتقل کنند.

انواع سازه:

۱- سازه های کششی (کابل ها)
۲- سازه های فشاری (قوس ها)
۳- سازه های خمشی (تیرها)
۴- سازه های قابی (مجموعه ای از تیرها و ستون ها)، نیروهای خمشی، برشی، محوری، پیچشی
۵- سازه های کششی و فشار٠ی (خرپا)
۶- شبکه ها



۷- ورق ها

مراحل طراحی سازه:

۱- تعیین فرم و هندسه سازه

۲- محاسبه درجه نامعینی و بررسی پایداری آن تحت هر بارگذاری دلخواه

۳- بارگذاری سازه ها (تخمین بارهایی که در طول عمر سازه به آن وارد میشود (بار مرده، بار زنده، برف، باد))

۴- محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی و نیروهای داخلی اعضای سازه

۵- محاسبه تنش های ایجاد شده در نقاط مختلف اجزا سازه و مقایسه آنها با تنش های مجاز (در صورت لزوم تغییر مقطع عضو و تکیه گاه ها از بند ۴)

۶- محاسبه تغییر شکل های سازه و کنترل آنها با مقادیر مجاز

هدف از تحلیل سازه:

۱- محاسبه درجه نامعینی و تحت پایداری سازه

۲- محاسبه عکس العمل تکیه گاهی و نیروهای داخلی اعضای سازه

۳- محاسبه تغییرمکان نقاط مختلف سازه

معینی و نامعینی سازه:
تعادل سازه

تعادل استاتیکی، جسم پس از اعمال نیرو ساکن بماند، جهت برقراری تعادل باید برآیند نیروهای وارد بر سیستم صفر باشد.

بنابراین شرط لازم و کافی برای برقراری تعادل سازه در فضای سه بعدی برقراری شش ۶ معادله مستقل زیر می باشد

$$\begin{cases}\sum f_x=0\\ \sum f_y=0\\ \sum M_z=0\end{cases} or \begin{cases}\sum f_x=0\\ \sum f_y=0\\ \sum f_z=0\end{cases} or \begin{cases}\sum M_x=0\\ \sum M_y=0\\ \sum M_z=0\end{cases} \ldots$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تعادل یک سازه در صفحه برقراری سه معادله مستقل زیر میباشد. که به اشکال مختلف قابل توسعه است

$$\begin{cases}\sum f_x=0\\ \sum f_y=0\\ \sum M_z=0\end{cases} or \begin{cases}\sum f_x=0\\ \sum f_y=0\\ \sum f_z=0\end{cases} or \begin{cases}\sum M_x=0\\ \sum M_y=0\\ \sum M_z=0\end{cases} \ldots$$

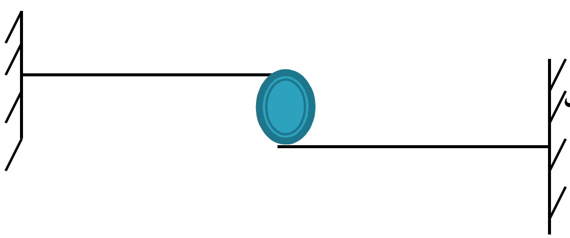
معادلات شرط:

نحوه ساخت سازه ها باعث میشود که مقدار نیروهای داخلی در برخی نقاط آنها مشخص باشد، معلوم بودن نیروی داخلی در این نقاط موجب می شود که در به جز معادلات تعادل استاتیکی، معادلات اضافی دیگری برای سازه ایجاد شود. به این معادلات، معادلات شرط گویند.

در حالت کلی اگر m عضو در یک سازه صفحه ای به هم لولا شوند، $m-1$ معادله شرط داریم

در حالت کلی اگر m عضو در یک سازه فضایی به هم لولا شوند، $3(m-1)$ معادله شرط داریم

معادله شرط ناشی از حضور غلتک داخلی



در حضور غلتک داخلی، نیروی محوری و لنگر خمشی برابر صفر هستند

بنابراین در اثر حضور غلتک داخلی، دو ۲ معادله شرط ایجاد می شود.

تعداد کل معادلات تعادل حاکم بر رفتار یک سازه برابر است با تعداد معادلات کلی تعادل به علاوه تعداد معادلات شرط، بنابراین در صفحه تعداد کل معادلات برابر با:

$$S=3+c$$

درجه نامعینی:

اگر تعداد کل معادلات تعادل حاکم بر سازه را با S نمایش دهیم، و تعداد کل مجهولات سازه را با X معرفی کنیم، درجه نامعینی سازه n برابر است با:

$$n = X - S$$

$n = 0$ سازه معین است (در این حالت تعداد مجهولات با تعداد معادلات برابر است و با استفاده از معادلات تعادل و معادلات شرط میتوان مجهولات سازه را محاسبه کرد)

$n \succ 0$ سازه نامعین است (در این حالت تعداد مجهولات بیشتر از معادلات است و برای محاسبه آنها در معادلات اضافی دیگر نیاز داریم)

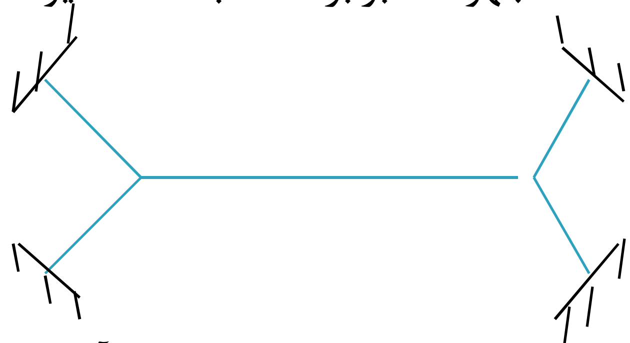
$n \prec 0$ سازه ناپایدار است (تعداد مجهولات کمتر از تعداد معادلات است)

روش تعیین درجه نامعینی

روش سازه های باز و بسته:

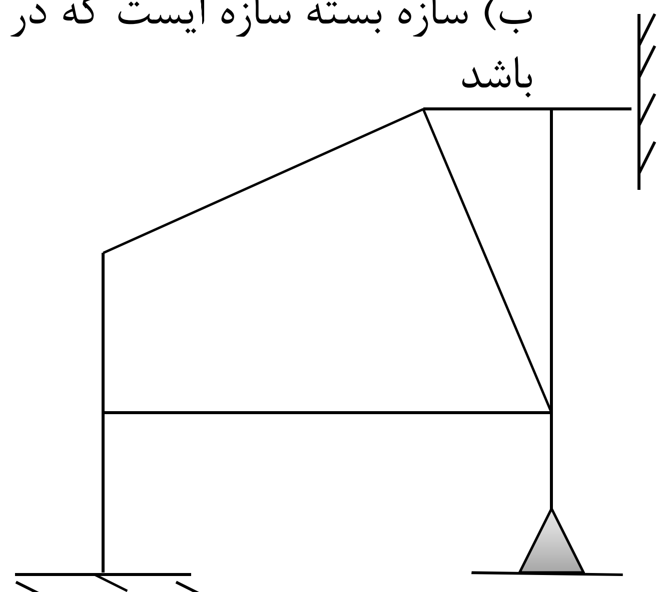
الف) سازه باز سازه ای است که در ساختار هندسی آنها هیچ کادر بسته ای وجود نداشته باشد.

در یک سازه باز تعداد مجهولات برابر است با تعداد قیود تکیه گاهی (عکس العمل های تکیه گاهی)



$$n = r - (3 + c)$$

ب) سازه بسته سازه ایست که در ساختار هندسی آن حداقل یک کادر بسته موجود باشد



$$n = r + 3(Closed\,box) - (3 + c)$$

روش شمارش تعداد اعضا و گره ها:

بررسی خرپای صفحه ای

هر عضو خرپای صفحه ای یک مجهول دارد

بنابراین تعداد مجهولات خرپای m عضوی برابر است با $X=m+r$

در هرگره خرپای صفحه ای دو ۲ معادله تعادل وجود دارد لذا خرپای صفحه ای که j گره داشته باشد $S=2j$

بنابراین درجه نامعینی خرپای صفحه ای با m عضو j گره برابر است با $n=(m+r)-2j$

بررسی خرپای فضایی

هر عضو یک مجهول دارد

m عضو $\longrightarrow m$ مجهول دارد

هر گره سه ۳ معادله تعادل دارد در نتیجه j گره $3j$ معادله تعادل دارد $n=(m+r)-3j$

قاب صفحه ای

هر عضو ۳ مجهول، در نتیجه m عضو $\longrightarrow 3m$ مجهول

هر گره سه ۳ مجهول، در نتیجه j گره $\longrightarrow 3j$ مجهول

قاب فضایی

هر عضو ۶ مجهول در نتیجه m عضو $\longrightarrow 3m$ مجهول

هر گره ۶ مجهول در نتیجه j گره $\longrightarrow 3j$ مجهول

پایداری سازه ها:

فرم هندسی سازه پس از بارگذاری دگرگون نشود.

جسم صلب:

جسمی است که فاصله نسبی نقاط آن پس از بارگذاری ثابت بماند

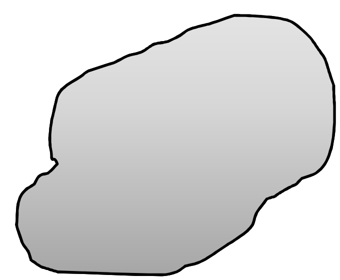
درجه آزادی:

تعداد حرکات مستقلی که یک جسم می تواند داشته باشد درجه آزادی آن جسم نامیده می شود.

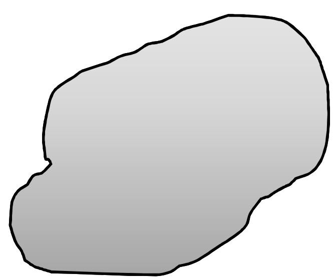
ذره مادی در فضا

دره مادی در صفحه

جسم صلب در فضا



جسم صلب در صفحه



مفهوم پایداری:

سیستمی را سازه پایدار گویند که موقعیت مکانی نقاط مختلف آن پس از اعمال هرگونه نیرو ثابت بماند. (هندسه تغییر نکند)

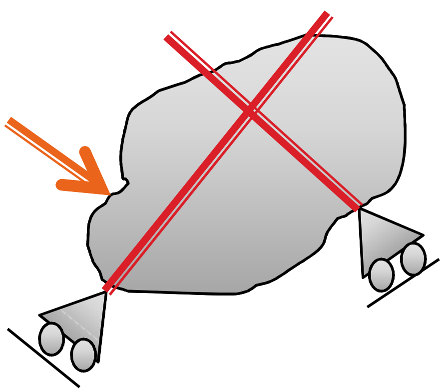
بررسی پایداری سیستم سازه ای

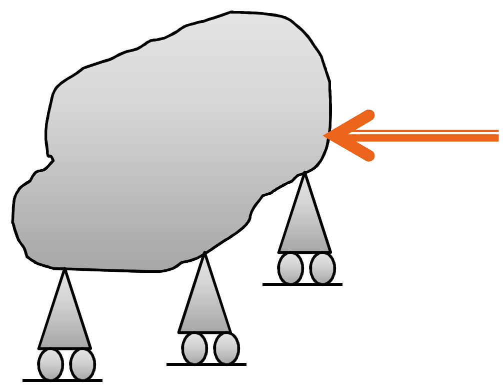
۱) سازه، جسم صلب باشد

۲) با اعمال قیود تکیه گاهی مناسب بر سازه ، از حرکت انتقال آن جلوگیری شود.

با توجه به مطالب فوق برای پایدار کردن یک جسم صلب در صفحه باید از سه قید تکیه گاهی مناسب استفاده کرد

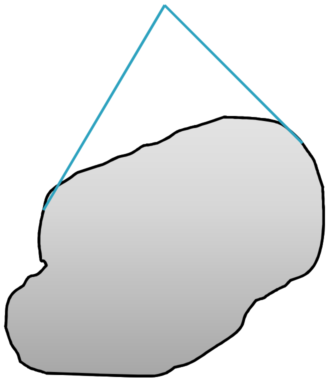
۱) قیود تکیه گاهی موازی و همرس نباشند.



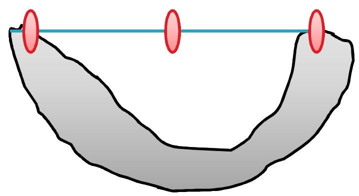


ترکیب پایداری اجسام صلب:

ترکیب یک جسم صلب و یک گره

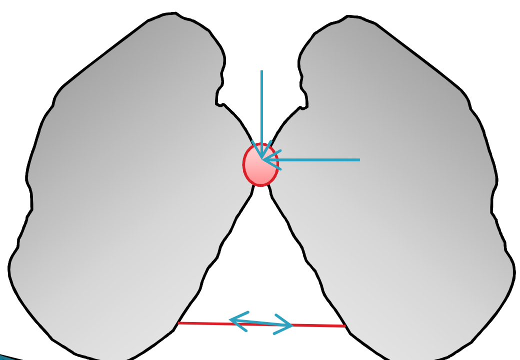


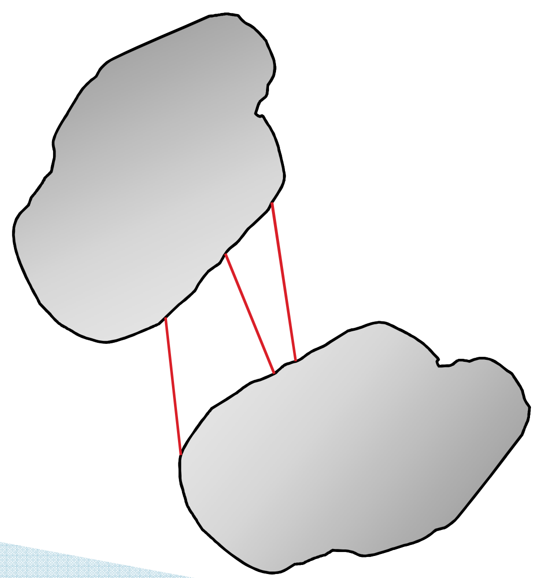
یا به عبارتی سه مفصل در یک خط راست سیستم را ناپایدار میکند

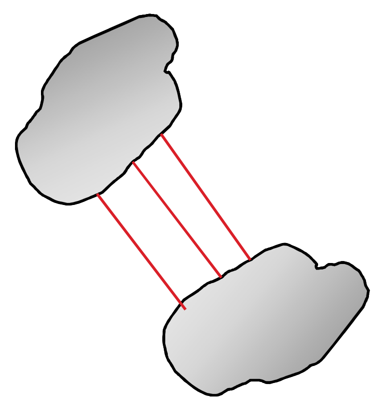


ترکیب پایدار دو جسم صلب

دو جسم صلب را میتوان توسط سه قید تکیه گای مناسب به صورت پایدار بر هم متصل نمود (دو جسم صلب تبدیل به یک جسم صلب شود). با قیود تکیه گاهی مناسب (موازی و همرس) نباشد

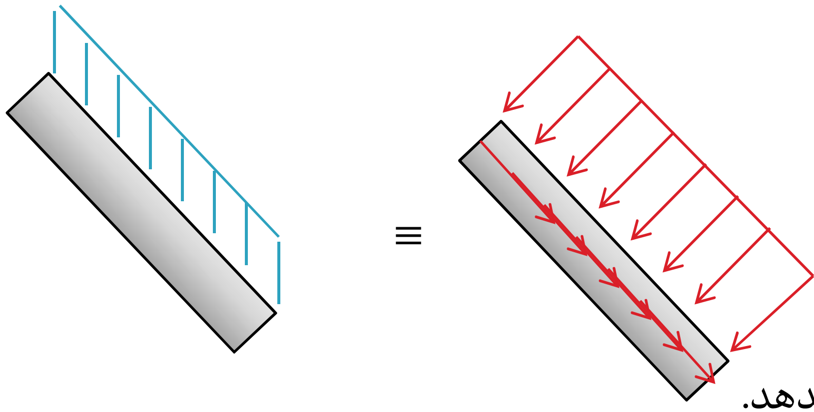






تحلیل مجموعه های خمشی معین:

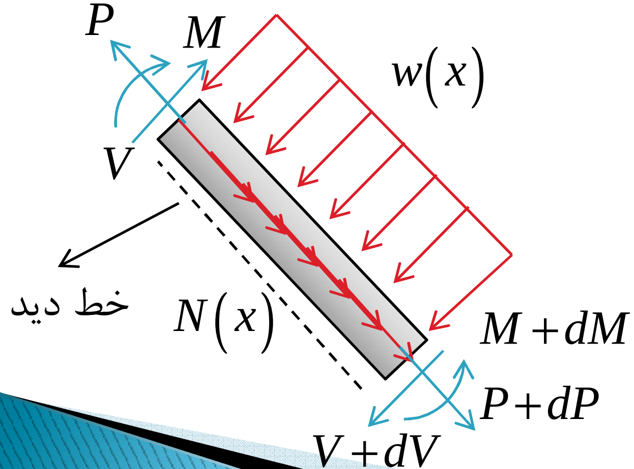
سازه هایی که در اثر باهای خارجی دچار لنگر خمشی و نیروی برشی می شوند با عنوان سازه های خمشی شناخته می شوند.



خط دید: تار تحت کشش درخمش مثبت را نشان میدهد.

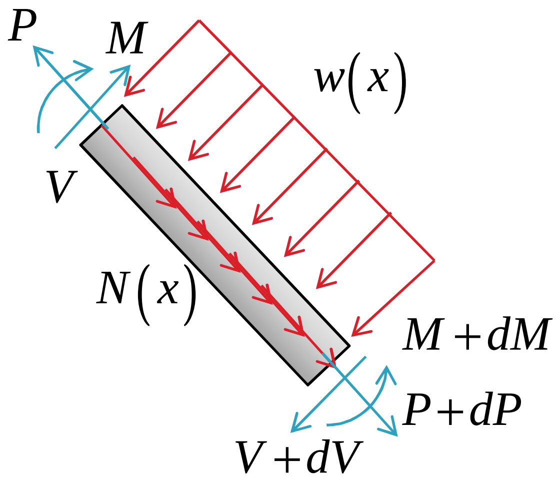
تعیین رابطه نیروهای داخلی و بارهای خارجی

با فرض المان کوچکی از یک عضو خمشی داریم



$$\overset{+}{\longrightarrow}\sum F_x = 0.0 \longrightarrow P + dP + N(x)dx - P = 0.0$$

$$dP + N(x)dx = 0.0 \longrightarrow \boxed{N(x) = -\frac{dP}{dx} \qquad \boxed{1}}$$



$$\overset{+}{\longrightarrow}\sum F_y = 0.0 \longrightarrow V - w(x)\,dx - (V + dV) = 0.0$$

$$dV + w(x)\,dx = 0.0 \longrightarrow \boxed{w(x) = -\frac{dV}{dx} \qquad \boxed{2}}$$

$$\overset{+}{\longrightarrow}\sum M_o = 0.0 \longrightarrow M + V(x)\,dx - w(x)\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) - (M + dM) = 0.0$$

$$w(x)\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) - V(x)\,dx + dM = 0.0 \longrightarrow \boxed{V(x) = \frac{dM}{dx} \qquad \boxed{3}}$$

$$\xrightarrow{\boxed{3}} \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} \qquad \xrightarrow{\boxed{2}\&\boxed{3}} \frac{d^2M}{dx^2} = -w(x)$$

با استفاده از رابطه ۱

$$\xrightarrow{\boxed{1}} N(x) = -\frac{dP}{dx} \rightarrow dP = -N(x)\,dx$$

$$\rightarrow \int dP = \int -N(x)\,dx \rightarrow P - P_o = \int_{x_0}^{x} -N(x)\,dx$$

$$\rightarrow P = +P_o - \int_{x_0}^{x} N(x)\,dx$$

یعنی نیروی محوری در هر مقطع عضو برابر است با نیروی محوری مقطع قبلی منهای مساحت زیر منحنی بارهای خارجی موازی با محور عضو

با استفاده از رابطه ۲

$$\xrightarrow{\boxed{2}} w(x) = -\frac{dV}{dx} \rightarrow dV = -w(x)\,dx$$

$$\rightarrow \int dV = \int -w(x)\,dx \rightarrow V - V_o = \int_{x_0}^{x} -w(x)\,dx$$

$$\rightarrow V = V_o - \int_{x_0}^{x} w(x)\,dx$$

یعنی نیروی برشی در هر مقطع عضو برابر است با نیروی برشی مقطع قبلی منهای مساحت زیر منحنی بارهای خارجی عمود با محور عضو

با استفاده از رابطه ۳

$$\xrightarrow{\boxed{3}} V(x) = \frac{dM}{dx} \rightarrow dM = V(x)\,dx$$

$$\rightarrow \int dM = \int V(x)\,dx \rightarrow M - M_o = \int_{x_0}^{x} V(x)\,dx$$

$$\rightarrow M = M_o + \int_{x_0}^{x} V(x)\,dx$$

یعنی ممان خمشی در هر مقطع عضو برابر است با لنگر خمشی

مقطع قبلی، بعلاوه مساحت زیر منحنی نمودار برشی در فاصله دو مقطع

نکته: مرتبه تابع V یک واحد از مرتبه بارهای خارجی عمود بر محور عضو بیشتر است.

نکته: مرتبه تابع M یک واحد از مرتبه تابع V بیشتر بوده است.

۱) اگر عضو فقط تحت اثر **بارهای متمرکز** باشد، تابع نیروی برشی در فاصله هر دو نیرو متمرکز **ثابت** است و تابع لنگر خمشی **خطی** می شود

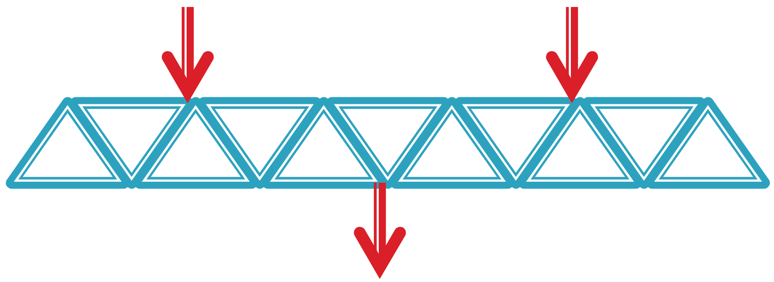
۲) اگر عضو تحت اثر باگذاری **گسترده یکنواخت** باشد (یعنی شدت بار ثابت باشد) تابع برش **خطی** و تابع لنگر از **درجه دوم** می باشد

۳) اگر عضو تحت اثر بارگذاری خطی باشد، برش تابع درجه دو و لنگرتابع درجه سوم می باشد.

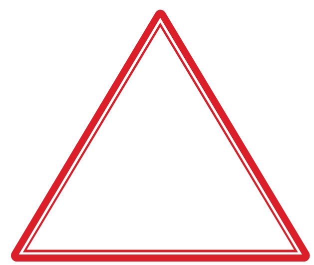
خرپاها

خرپا نوعی سیستم سازه ای است که اعضای آن با اتصالات لولایی به هم متصل شوند.

در خرپاها بارهای خارجی باید از طریق گره ها به سازه اعمال شوند



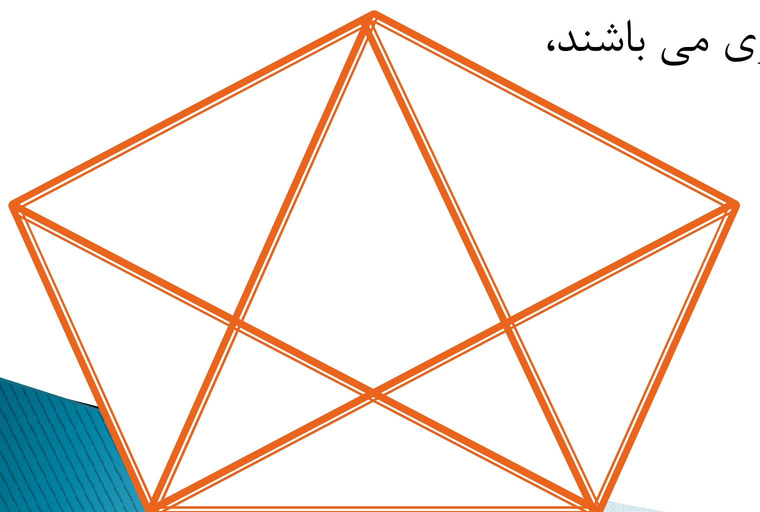
کوچکترین واحد صلب خرپا



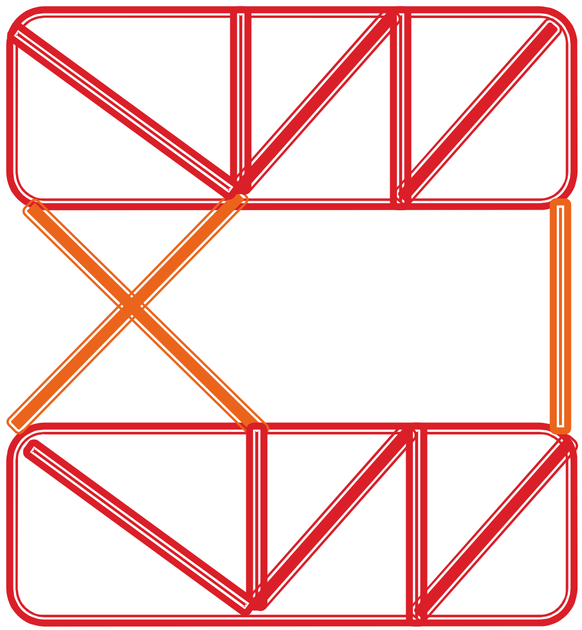
انواع خرپا:

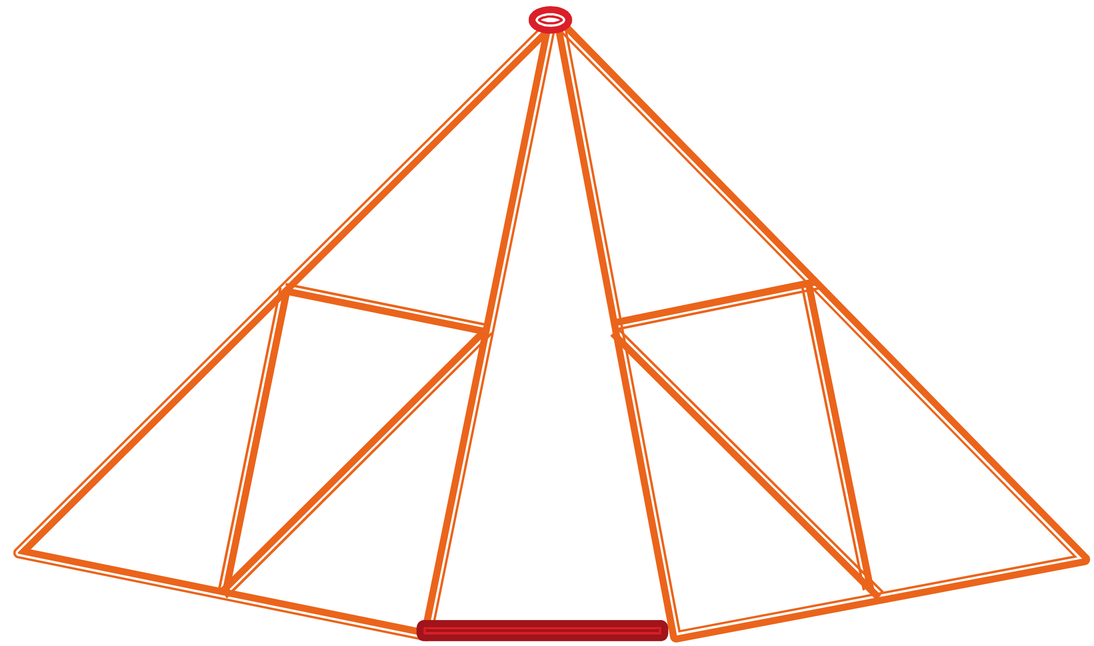
خرپاهای ساده: این خرپاها دارای یک هسته مثلثی مرکزی می باشند، که سایر گره های خرپا به آن هسته مرکزی متصل هستند.

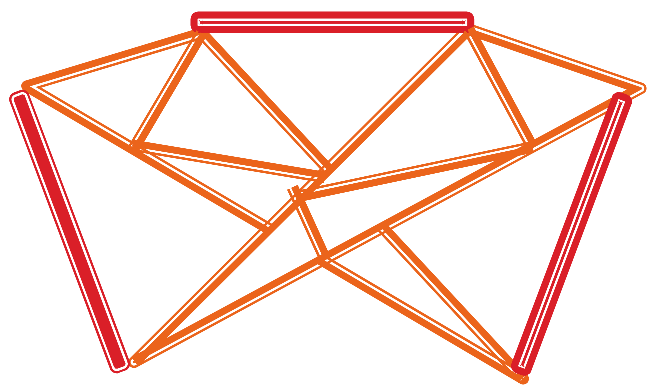
نکته: خرپای ساده از نظر داخلی پایدار می باشند. (به عبارت دیگر خرپای ساده جسم صلب است)



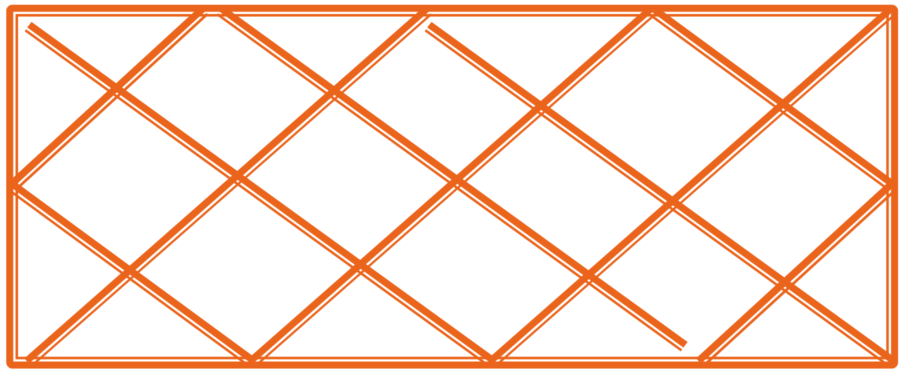
خرپای مرکب: با اتصال دو یا چند خرپای ساده به طور مناسب، خرپای مرکب تشکیل می شود.

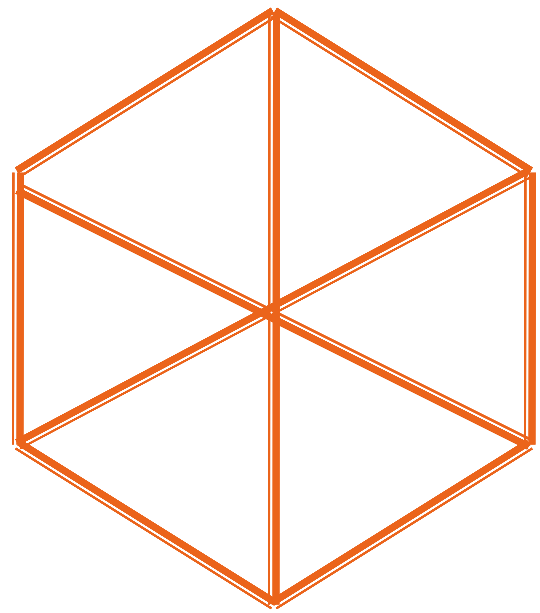






خرپای بغرنج: خرپایی که نه ساده باشد نه مرکب، را خرپای بغرنج گویند



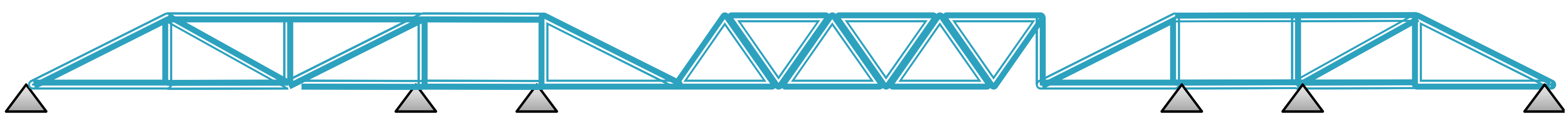


پایداری خرپاها

خرپاهای ساده از نظر داخلی پایدار هستند (یعنی جسم صلب هستند) لذا برای پایداری آنها باید سه قید مناسب تکیه گاهی تعبیه شوند

خرپاهای مرکب هنگامی پایدار هستند که اجزاء ساده آنها بطور مناسب به هم متصل شده باشند، و کل مجموعه برای قیود مناسب تکیه گاهی قرار گیرد

از انجا که پایداری خرپاهای بغرنج با استفاده از شیوه های هندسی امکان پذیر نیست، فعلا از پایداری آنها صرف نظر میکنیم.



کوچکترین واحد صلب خرپا

انواع خرپا:

خرپاهای ساده: این خرپاها دارای یک هسته مثلثی مرکزی می باشند، که سایر گره های خرپا به آن هسته مرکزی متصل هستند.

نکته: خرپای ساده از نظر داخلی پایدار می باشند. (به عبارت دیگر خرپای ساده جسم صلب است)

خرپای مرکب: از ترکیب دو یا چند خرپای ساده که بطور مناسب (با سه قید تکیه گاهی مناسب بهم وصل شده باشند) خرپای مرکب تشکیل میشود.
برای تحلیل خرپای مرکب: ابتدا اجزاء خرپای ساده شناسایی و سپس از روی قیدهای متصل کننده خرپاهای ساده، جدا میشوند، سپس نیروهای هر قید محاسبه میشود، و خرپاهای ساده به صورت جداگانه تحلیل میشوند.

خرپای بغرنج: از دو روش بار مجهول و هنبرگ قابل تحلیل می باشد.

روش کارمجازی

برای محاسبه نیروهای داخلی سازه های معین

$$\begin{cases}\sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \\ \sum M_z = 0\end{cases} or \begin{cases}\sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \\ \sum f_z = 0\end{cases} or \begin{cases}\sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0\end{cases} or \ \ldots$$

با استفاده از روش کارمجازی، معادلات فوق را به صورت غیر مستقیم برقرار میکنیم.

مفهوم کار مجازی:

در اثر حرکت محل اثر نیرو در راستای نیرو کار انجام می شود.

مقدار کار برابر است با مقدار نیرو ضربدر جابه جایی محل اثر نیرو در راستای نیرو

$$W = pd_s$$

در حالت کلی نیرو را به صورت برداری زیر نشان میدهیم.

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

و بردار جابه جایی را به صورت زیر نشان می دهیم

$$\overrightarrow{d\delta} = d\delta_x \vec{i} + d\delta_y \vec{j} + d\delta_z \vec{k}$$

با استفاده از مفهوم کار و انرژی داریم:

$$\overrightarrow{W} = \vec{p}.\overrightarrow{d\delta} = p_x d\delta_x + p_y d\delta_y + p_z d\delta_z$$

در مورد لنگر هم کار به صورت زیر محاسبه می شود.

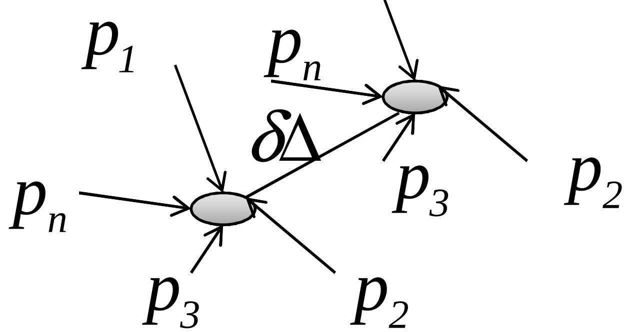
$$\overrightarrow{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$\overrightarrow{d\theta} = d\theta_x \vec{i} + d\theta_y \vec{j} + d\theta_z \vec{k}$$

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{M}.\overrightarrow{d\theta} = M_x d\theta_x + M_y d\theta_y + M_z d\theta_z$$

تعادل یک ذره مادی با استفاده از روش کار مجازی

ذره مادی A را تحت اثر نیروهای متعادل $p_1 , p_2 , p_3 ,\ldots, p_n$ در نظر بگیرید



$$\delta W = \overrightarrow{p_1}\,\overrightarrow{\delta\Delta} + \overrightarrow{p_2}\,\overrightarrow{\delta\Delta} + \overrightarrow{p_2}\,\overrightarrow{\delta\Delta} + \ldots + \overrightarrow{p_n}\,\overrightarrow{\delta\Delta}$$

$$\delta W = \left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_2} + \ldots + \overrightarrow{p_n}\right)\overrightarrow{\delta\Delta}$$

عبارت داخل پرانتز رابطه فوق برآیند نیروهای وارد بر ذره مادی مورد بحث می باشد که به دلیل متعادل بودن نیروها برابر صفر است

$$\delta W = 0 \times \overrightarrow{\delta\Delta} \rightarrow \delta W = 0$$

- ✓کار انجام شده توسط نیروهای متعادل وارد بر ذره ی مادی A در اثر جابه جایی مجازی دلخواه $\delta\Delta$ برابر صفر است.
- ✓تغییر مکان مجازی دلخواه است
- ✓تغییرمکان مجازی را کوچک فرض میکنیم

تعادل اجسام صلب با استفاده از مفهوم کار مجازی

جسم صلب مجموعه ای از بی نهایت ذره مادی است که به فاصله نقاط مختلف آن نسبت به هم ثابت است

اگر یک نقطه از جسم صلب را توسط بردار $\delta\Delta$ جابه جا کنیم سایر نقاط آن هم با همین بردار جابه جا میشوند.

از آنجا که فاصله نسبی نقاط جسم صلب ثابت است در آن هیچگونه کرنشی ایجاد نمی شود لذا تنش های ایجاد شده در آن کادر انجام نمیدهد.

$$\delta W = \delta W_{EXT} + \delta W_{INT}$$

یعنی در اجسام صلب کار مجازی در اثر جابه جایی دلخواه $\overrightarrow{\delta\Delta}$ برابر است با کار مجازی نیروهای خارجی

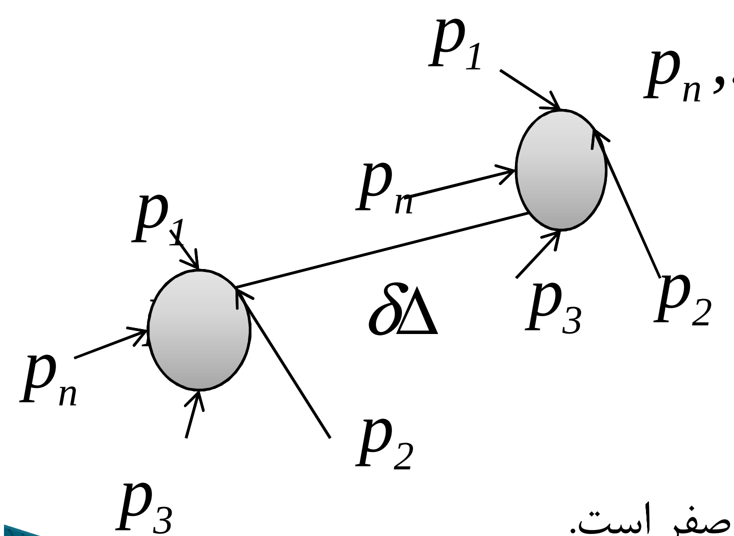
$$\delta W = \delta W_{EXT}$$

جسم صلب شکل فوق را تحت نیروهای متعادل $p_n, \dots, p_3, p_2, p_1$ در نظر بگیرید در اثر جابه جایی مجازی $\overrightarrow{\delta\Delta}$ اعمال شده برای جسم صلب، کار مجازی انجام شده به صورت زیر محاسبه می شود

$$\delta W = \delta W_{EXT} \rightarrow$$

$$\delta W = \overrightarrow{p_1}\,\overrightarrow{\delta\Delta} + \overrightarrow{p_2}\,\overrightarrow{\delta\Delta} + \overrightarrow{p_2}\,\overrightarrow{\delta\Delta} + \dots + \overrightarrow{p_n}\,\overrightarrow{\delta\Delta} \rightarrow$$

$$\delta W = \left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_2} + \dots + \overrightarrow{p_n}\right)\overrightarrow{\delta\Delta}$$



عبارت داخل پرانتز رابطه فوق برآیند نیروهای $p_n, \dots, p_3, p_2, p_1$ میباشد که به دلیل متعادل بودن آنها برابر صفر است بنابراین

$$\delta W = 0 \times \overrightarrow{\delta\Delta} \rightarrow \delta W = 0$$

بنابراین کار مجازی نیروهای متعادل وارد بر یک جسم صلب برابر صفر است.

محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی و نیروی داخلی سازه های معین بااستفاده از مفهوم کار مجازی

جهت محاسبه یک کمیت نیرویی از نیروی واقعی یک نقطه با (عکس العمل تکیه گاهی) با استفاده از روش کار مجازی باید مراحل زیر را انجام داد.

1) قید حرکتی متناظر با آن کمیت را حذف میکنیم (یعنی اگر کمیت مورد نظر نیرو باشد یک غلتک و اگر لنگر باشد یک لولا در محل آن قرار میدهیم).
2) اثر قید حذف شده را با اعمال نیروی مجهول در محل آن جبران می کنیم
3) در سیستم حاصل از اجرای بندهای فوق، یک درجه آزادی به گونه ای ایجاد میکنیم، که نیروی مجهول موجود بر آن کار مجازی انجام دهد
4) با اعمال رابطه کار مجازی نیروی مجهول را محاسبه میکنیم.

خطوط تاثیر سازه های معین

در عمل سازه های تحت اثر نیروی متحرک قرار دارند. حرکت باربری سازه نیروهای داخلی نقاط مختلف آن را تغییر میدهد.

جهت طراحی سازه هایی که تحت اثر چنین بارهایی قرار دارند باید بتوانیم مقادیر حداکثر نیروهای داخلی را در مقاطع مختلف سازه محاسبه کنیم. بدین منظور نموداری رسم میکنیم، که محور افقی آن محل باررمتمرکز P را نشان میدهد و محور قائم آن مقدار یک کمیت دلخواه را مانند برش یا لنگر مقطع در شکل فوق) نشان دهد اگر مقدار بار متمرکز P را برابر با واحد فرض کنیم. نمودار رسم شد، نمودار حداکثر کمیت مودر نظر نامیده میشود

جهت رسم نمودار خط اقز یک کمیت داخلواه سازه دو روش معرفی میکنیم

روش مستقیم

روش مجازی

روش مستقیم: دراین روش بار واحد را روی سازه حرکت میدهیم و با استفاده از معادلات تعادل کمیت مورد نظر را در هر موقعیت بار واحد محاسبه میکنیم و نمودار خط اثر آن را رسم میکنیم.

تغییرشکل سازه

اهمیت محاسبه تغییرمکان سازه ها

۱) به عنوان یک معیار در طراحی سازه ها

۲) برای تحلیل سازه های نامعین بر معادلات همسازی تغییرمکان نیاز داریم.

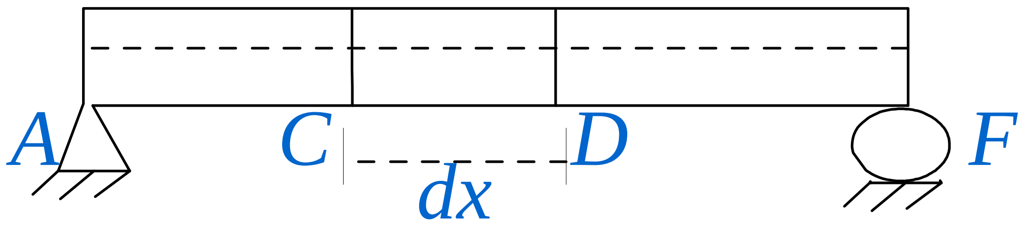
۳) تحلیل دینامیکی سازه ها

فرضیات و محدودیتها

۱) تغییرمکانهای سازه کوچک با

۲) سازه در محدود رفتاری الاستیک خطی است

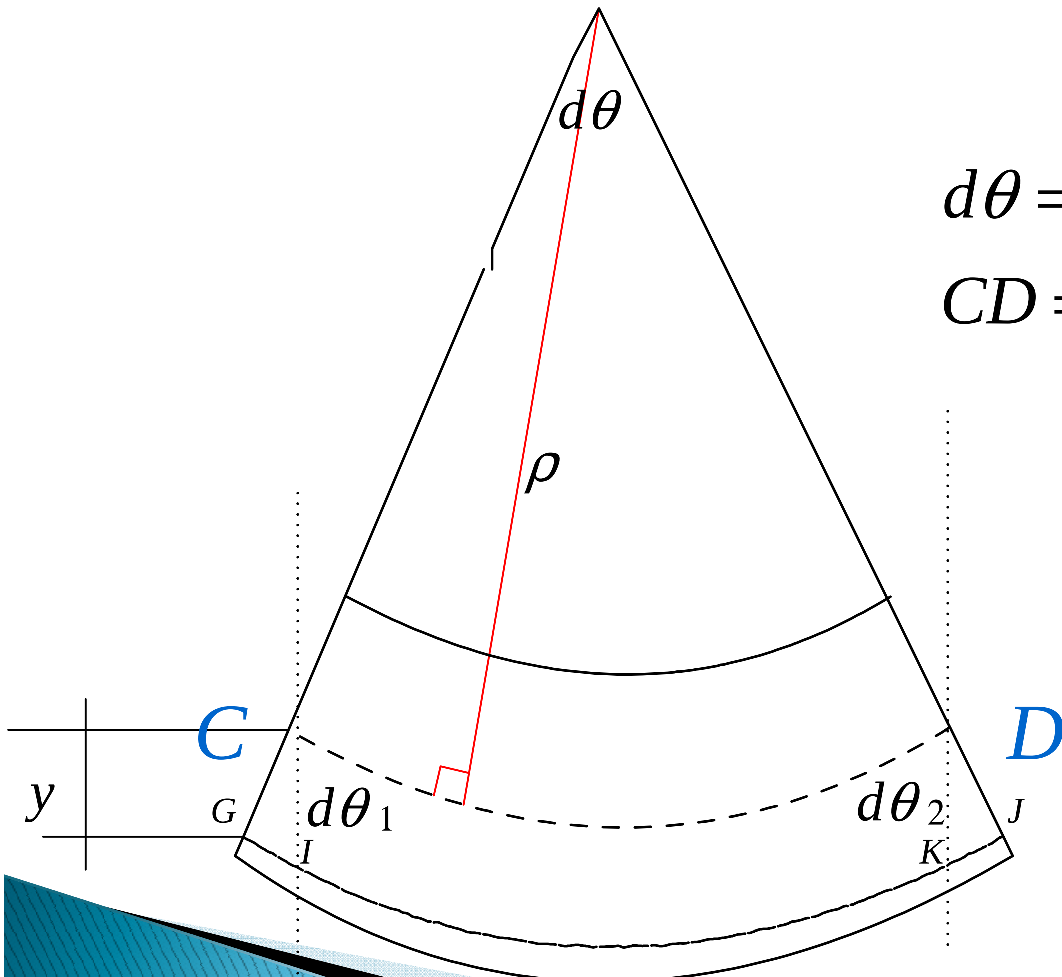
در اغلب سازه های کاربردی عمده ی تغییرمکان در اثر خمش ایجاد میشود و نیروهای محوری و برشی نقش کمتری در ایجاد تغییرمکان دارند. از این رو در این فصل به بررسی تغییرشکل های ناشی از خمش در سازه ها می پردازیم.



محاسبه تغییرمکان های ناشی از خمش

المان کوچکی به طول dx

از تغییر AB را در نظر بگیرید



$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 \qquad \boxed{1}$$

$$CD = dx,\ IC = JD = y,\quad OH = \rho$$

$$d\theta_1 = \frac{GI}{IC}, \quad d\theta_2 = \frac{JK}{JD}$$

$$d\theta = \frac{CD}{OH}$$

$$\xrightarrow{\boxed{1}} \frac{CD}{OH} = \frac{GI}{IC} + \frac{JK}{JD}$$

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{GI}{y} + \frac{JK}{y} = \frac{1}{y}(GI + JK)$$

$GI+JK$ تغییرطول تاری است که به فاصله y از تار خنثی قرار دارد.

$$GI+JK=\varepsilon_x dx=\frac{\sigma_x}{E}dx=\frac{My}{IE}dx$$

جایگذاری رابطه فوق در معادله ۱ عبارت زیر را نتیجه میدهد.

$$\frac{dx}{\rho}=\frac{1}{y}\frac{My}{EI}dx\rightarrow\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}\qquad\boxed{2}$$

$$\frac{1}{\rho}=\kappa=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}\qquad\boxed{3}$$

$$\xrightarrow{\boxed{2,3}}\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}=\frac{M}{EI}\rightarrow\frac{\dfrac{d^2w}{dx^2}}{\left(1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{M}{EI}$$

در رابطه فوق از رابطه $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ که مقدار کوچکی در مقابل عدد یک دارد، صرفنظر میکنیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}=\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$M=EIy''$$

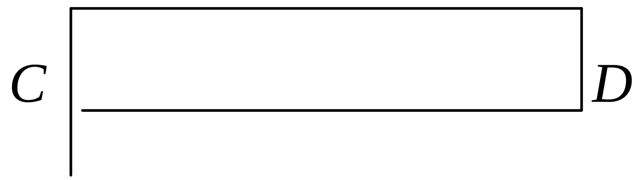
(Arc-Moment Method) روش لنگر مساحت

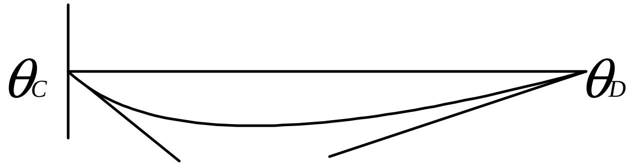
$$d\theta=d\theta_1+d\theta_2$$

$$d\theta=\frac{GI}{y}+\frac{JK}{y}=\frac{1}{y}\left(GI+JK\right)$$

$$d\theta=\frac{\varepsilon_x dx}{y}=\frac{\sigma_x}{E}dx=\frac{\frac{My}{IE}dx}{y}\rightarrow\frac{d\theta}{dx}=\frac{M}{IE}$$

اکنون قطعه از تیر زیر را در نظر بگیرید





$$d\theta = \frac{M}{IE}dx$$

$$\int_{x_C}^{x_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{IE}dx$$

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{IE}dx$$

$$\theta_{D/C} = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{IE}dx = A$$

به عبارتی A مساحت زیر منحنی $\dfrac{M}{IE}$ در فاصله CD می باشد.

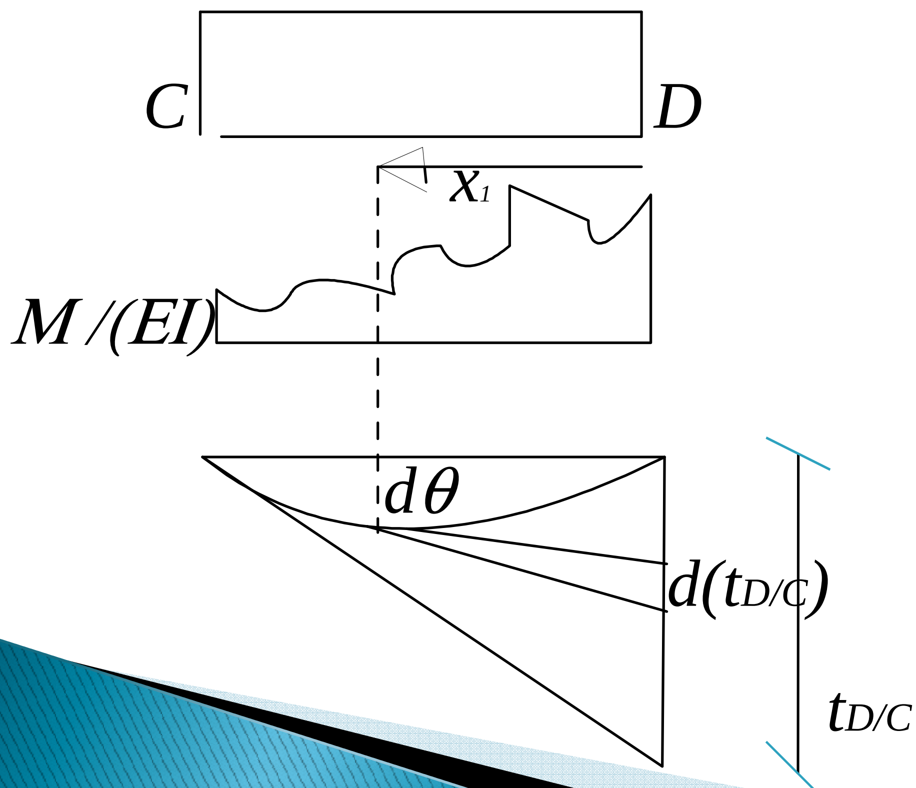
قضیه اول لنگر مساحت

تغییر زاویه خط مماس بین دو نقطه از منحنی تغییر شکل الاستیک عضو در اثر خمش با مساحت زیر منحنی $\frac{M}{IE}$ در آن فاصله برابر است. به شرطی که در ان فاصله پیوستگی نظیر مفصل نباشد

علامت $\theta_{D/C}$ با علامت مساحت زیر منحنی $\frac{M}{IE}$ یکسان است.

نکته: مثبت بودن علامت $\theta_{D/C}$ بدان معناست که با حرکت از نقطه C به سمت نقطه D مماس بر منحنی در جهت مثلثاتی دوران می کند.

قطعه تیر CD را در نظر بگیرید.



$$d\left(t_{D/C}\right) = x_1 d\theta$$

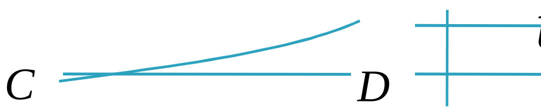
$$\int_{x_C}^{x_D} d\left(t_{D/C}\right) = \int_{x_C}^{x_D} x_1 d\theta$$

$$\rightarrow t_{D/C} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI} dx = A x_1$$

قضیه دوم لنگر مساحت

فاصله عمودی نقطه ای مانند D نسبت به خط مماس در C برابر است با لنگر مساحت ناحیه زیر منحنی $\frac{M}{IE}$ در فاصله CD نسبت به نقطه D به شرطی که در فاصله CD هیچ ناپیوستگی وجود نداشته باشد.

$$t_{D/C} \leq 0.0$$



$$t_{D/C} \geq 0.0$$

نکته: بطور مشابه میتوان ثابت کرد که

$$t_{C/D} = Ax_2$$

در آن x_2 فاصله مرکز سطح ناحیه زیر منحنی $\frac{M}{IE}$ در فاصله CD نسبت به نقطه C مباشد.

محدودیت های قضایای لنگر مساحت

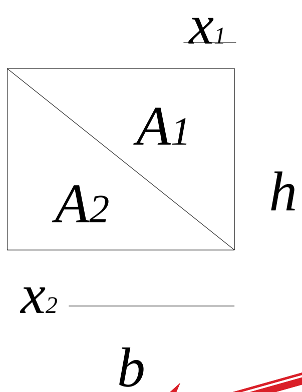
۱) در فاصله مورد بحث مفصل نباشد

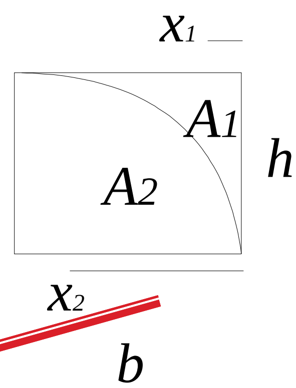
۲) تغییرمکانها کوچک و در ناحیه رفتاری الاستیک خطی باشند

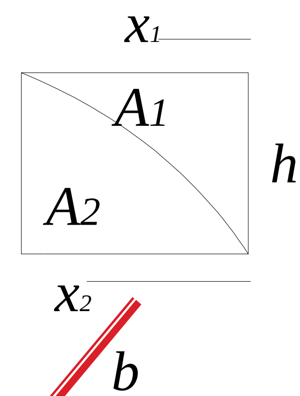
۳) فقط اثر خمش را در نظر میگیریم

$$A_1 = {}^{bh}\!/_{2}, \qquad x_1 = {}^{b}\!/_{3}$$

$$A_2 = {}^{bh}\!/_{2}, \qquad x_2 = {}^{2b}\!/_{3}$$





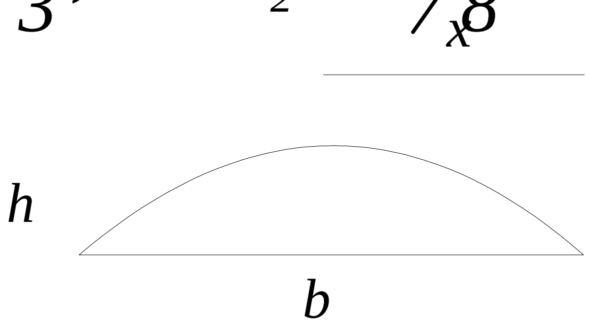


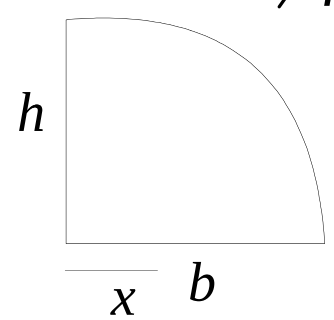
$$A_1 = {}^{2bh}\!/_{3}, \qquad x_1 = {}^{b}\!/_{4}$$

$$A_2 = {}^{bh}\!/_{3}, \qquad x_2 = {}^{5b}\!/_{8}$$

$$A_1 = {}^{nbh}\!/_{n+1}, \qquad x_1 = {}^{(n+3)x_1}\!/_{2}$$

$$A_2 = {}^{bh}\!/_{n+1}, \qquad x_2 = {}^{b}\!/_{n+2}$$





$$A = {}^{2bh}\!/_{3}, \qquad x = {}^{b}\!/_{2}$$

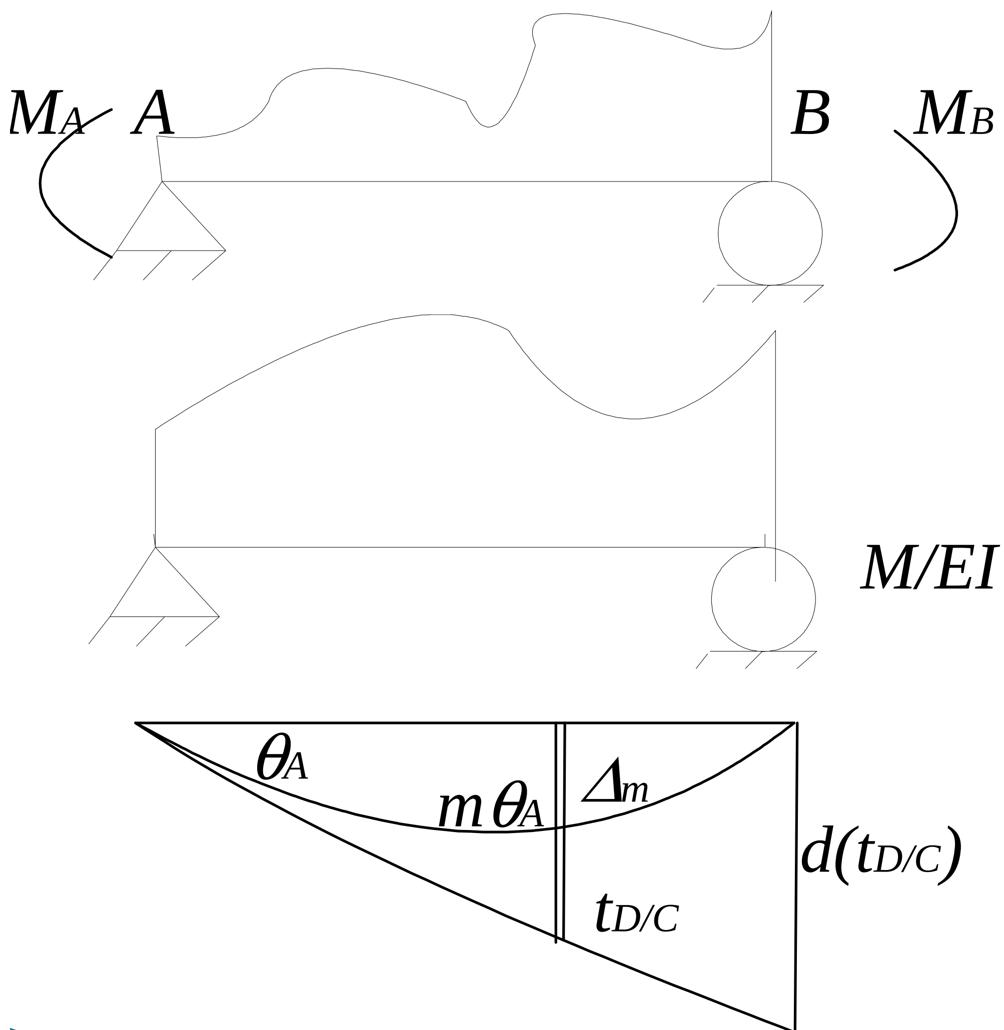
$$A = {}^{2bh}\!/_{3}, \qquad x = {}^{3b}\!/_{8}$$

روش بار الاستیک *Elastic Load Method*

قطعه از یک تیر در فاصله AB را در نظر بگیرید

سپس فرض کنید:

نقاط انتهایی تغییرمکان نداشته باشد



$$\left|\theta_A\right| = \frac{1}{L}\left|t_{B/A}\right| \rightarrow \theta_A = -\frac{1}{L}t_{B/A}$$

$$t_{B/A} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}dx$$

$$\rightarrow \theta_A = -\frac{1}{L}\int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M}{EI}dx$$

روش بار الاستیک

اکنون یک تیر فرضی با همان هندسی تیر AB اختیار کنید، که تحت بارگذاری $\frac{M}{IE}$ قرار دارد

سپس به تحیلی فرضی زیر میپردازیم.

$$FBD = \sum \bar{M}_B = 0.0$$

$$\bar{R}_A \times L - \int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M}{EI} dx = 0.0$$

$$\bar{R}_A = \frac{1}{L} \int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M}{EI} dx$$

$$\bar{V}_A = \bar{R}_A \rightarrow \bar{V}_A = \frac{1}{L} \int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M}{EI} dx$$

$$\theta_A = -\bar{V}_A$$

روش بار الاستیک

اکنون به محاسبه دوران نقطه دلخواه m میپردازیم

$$\theta_m = \theta_A + \theta_{m/A}$$

$$\theta_m = \frac{1}{L}\int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M}{EI}dx + \int_{x_A}^{x_m} \frac{M}{EI}dx$$

محاسبه برش نقطه m در تیر فرضی

$$\bar{V}_m = \bar{R}_A - \int_{x_A}^{x_m} \frac{M}{EI}dx$$

$$\bar{V}_m = \frac{1}{L}\int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M}{EI}dx - \int_{x_A}^{x_m} \frac{M}{EI}dx$$

بنابراین شیب هر نقطه دلخواه از منحنی الاستیک تیر مورد بحث برابر است $\theta_m = -\bar{V}_m$

با قرینه برش آن نقطه در تیر فرضی تحت بارگذاری $\frac{M}{IE}$

روش بار الاستیک

اکنون به محاسبه دوران نقطه دلخواه m میپردازیم

$$\left|\Delta_m\right| = x_m\left|\theta_A\right| - \left|t_{m/A}\right|$$

$$\Delta_m = -\frac{x_m}{L}\int_{x_A}^{x_m} x_1\frac{M}{EI}dx + \int_{x_A}^{x_m} x_2\frac{M}{EI}dx$$

محاسبه لنگر نقطه m در تیر فرضی

$$\bar{M}_m = \bar{R}_A \times x_m - \int_{x_A}^{x_m} x_2\frac{M}{EI}dx$$

$$\bar{M}_m = \frac{x_m}{L}\int_{x_A}^{x_m} x_1\frac{M}{EI}dx - \int_{x_A}^{x_m} x_2\frac{M}{EI}dx$$

$\rightarrow \Delta_m = -\bar{M}_m$ بنابراین تغییرمکان هر نقطه دلخواه از منحنی الاستیک تیر مورد بحث برابر است

با قرینه لنگر خمشی آن نقطه در تیر فرضی تحت بارگذاری $\frac{M}{IE}$

روش تیر مزدوج

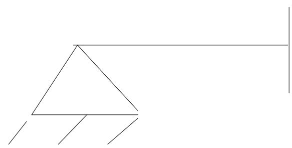
$$\theta = 0.0 \qquad \Delta = 0.0$$

$$\bar{V} = 0.0 \qquad \bar{M} = 0.0$$

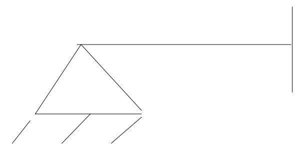
$$\theta \neq 0.0 \qquad \Delta \neq 0.0$$

$$\bar{V} \neq 0.0 \qquad \bar{M} \neq 0.0$$

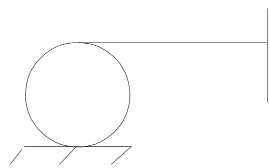
$$\theta \neq 0.0 \qquad \Delta = 0.0$$



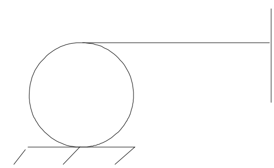
$$\bar{V} \neq 0.0 \qquad \bar{M} = 0.0$$



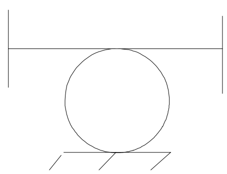
$$\theta \neq 0.0 \qquad \Delta = 0.0$$



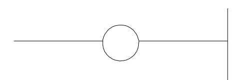
$$\bar{V} \neq 0.0 \qquad \bar{M} = 0.0$$



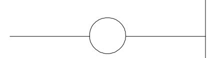
$$\theta \neq 0.0 \qquad \Delta = 0.0$$



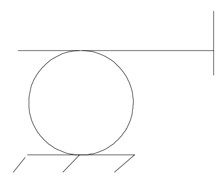
$$\bar{V} \neq 0.0 \qquad \bar{M} = 0.0$$



$$\theta^{+} \neq \theta^{-} \neq 0.0 \qquad \Delta \neq 0.0$$

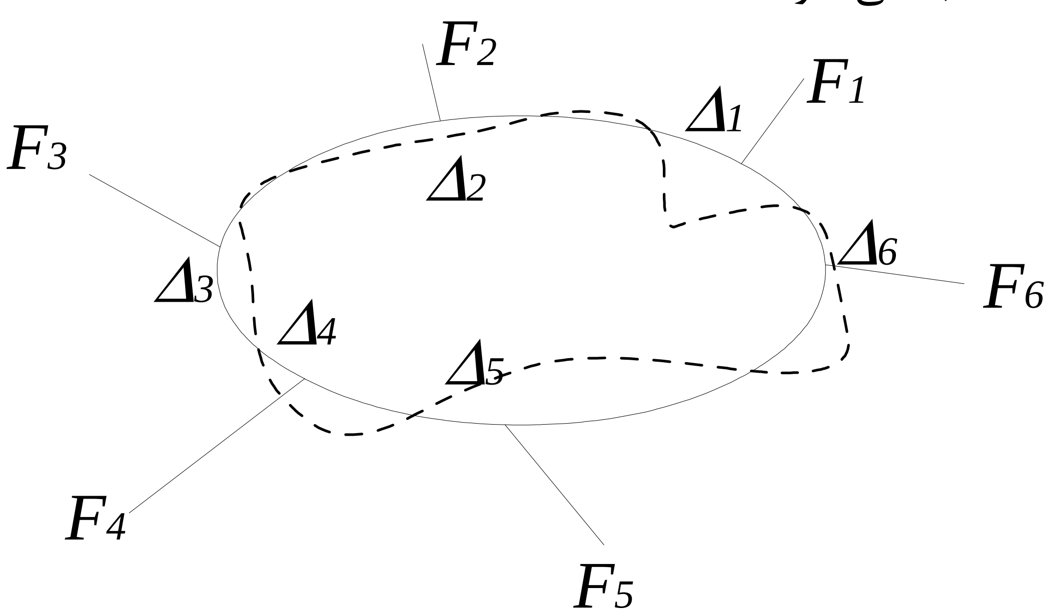


$$\bar{V}^{+} \neq \bar{V}^{-} \neq 0.0 \qquad \bar{M} \neq 0.0$$



روش های انرژیEnergy Method

اگر به یک سیستم سازه ای نیروهای $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ به صورت تدریجی وارد شود، بطوریکه مقدار آنها از صفر تا مقدار نهایی تغییر کند. تغییرمکان نقطه محل اثر آنها در راستای خودشان به ترتیب $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ باشد. به شرطی که سازه در محدود رفتار الاستیک خطی باشد.
کار مجموعه نیروها به صورت زیر محاسبه می شود.



$$W_i = \frac{F_i \Delta_i}{2}$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(F \Delta \right)_i$$

روش های انرژی Energy Method

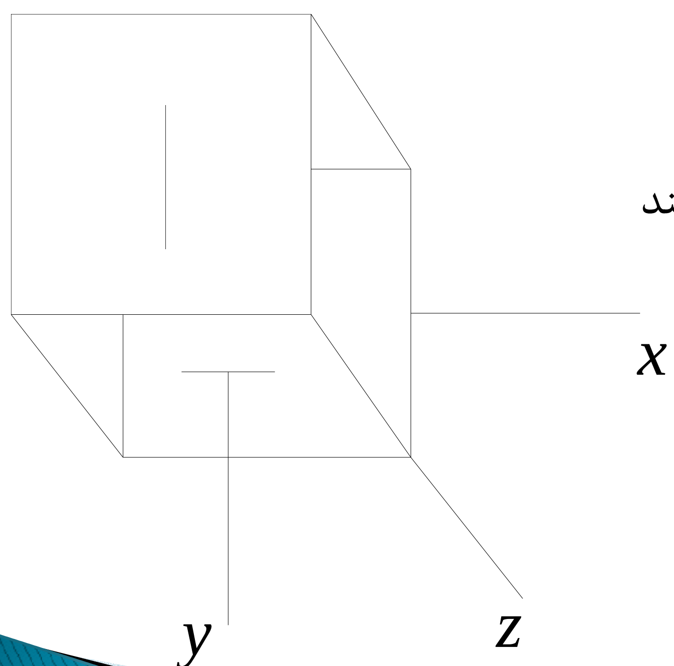
برای جسمی که دارای رفتار الاستیک خطی باشد در صورتی که بارهای خارجی به صورت استاتیکی به سازه وارد شوند و در جسم ارتعاش و تغییر دما ایجاد شود، کار نیروهای خارجی به صورت انرژی داخلی در جسم ذخیره می شود.

$$W = U$$

انرژی داخلی کار تنشها در خلال فرآیند ایجاد کرنش

محاسبه انرژی داخی در حالت کلی

در یک نقطه ازجسم میدانهای تنش و کرنش به صورت زیر میباشند



$$\sigma = \left\{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \right\}$$

$$\varepsilon = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \right\}$$

انرژی المان مورد بحث

$$U=\frac{1}{2}(\sigma_x dydz)(\varepsilon_x dx)+\frac{1}{2}(\sigma_y dxdz)(\varepsilon_y dy)+\frac{1}{2}(\sigma_z dxdy)(\varepsilon_z dz)$$

$$+\frac{1}{2}(\tau_{xy} dxdz)(\gamma_{xy} dy)+\frac{1}{2}(\tau_{yz} dydz)(\gamma_{xy} dx)+\frac{1}{2}(\tau_{xz} dxdy)(\gamma_{xz} dz)$$

با تعریف U_0 **به شکل زیر**

$$U_0=\frac{U}{dxdydz}$$

داریم

$$U=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x+\frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y+\frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z+\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}+\frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz}+\frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz}$$

تنش و کرنش با توجه به روابط هوک دارای معادلات زیر میباشند.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \vartheta\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right), \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \vartheta\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right), \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \vartheta\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_x}{E}\right), \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

با جایگذاری روابط هوک در رابطه U_0 خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\vartheta}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)$$

محاسبه انرژی داخل اجسام در حالت مختلف

۱) جسم تحت اثر نیروی محوری

$$U=\int_V U_0 dV=\int_V \frac{1}{2E}\sigma_x^2 dV=\int_0^L\left[\int_A \frac{1}{2E}\left(\frac{P(x)}{A(x)}\right)^2 dA\right]dx$$

$$\rightarrow U=\int_0^L \frac{1}{2E}\left(\frac{P(x)}{A(x)}\right)^2\left[\int_A dA\right]dx=\int_0^L\left[\frac{P^2(x)}{2EA(x)}\right]dx$$

۲) عضو تحت اثر خمش خالص

$$U=\int_V U_0 dV=\int_V \frac{1}{2E}\sigma_x^2 dV=\int_0^L\left[\int_A \frac{1}{2E}\left(\frac{M(x)y}{I}\right)^2 dA\right]dx$$

$$\rightarrow U=\int_0^L \frac{1}{2E}\left(\frac{M(x)}{I}\right)^2\left[\int_A y^2 dA\right]dx=\int_0^L\left[\frac{M^2(x)}{2EI}\right]dx$$

محاسبه انرژی داخل اجسام در حالت مختلف

۳) عضو تحت اثر برش خالص

$$U=\int_V U_0 dV=\int_V \frac{1}{2G}\tau_{xy} dV=\int_0^L\left[\int_A \frac{1}{2G}\left(\frac{V(x)Q}{It}\right)^2 dA\right]dx$$

$$\rightarrow U=\int_0^L \frac{V^2(x)}{2G}\left[\int_A\left(\frac{Q}{It}\right)^2 dA\right]dx=\int_0^L\left[\frac{V^2(x)}{2\bar{A}G}\right]dx$$

۴) عضو تحت اثر پیچش خالص

$$U=\int_V U_0 dV=\int_V \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 dV=\int_0^L\left[\int_A \frac{1}{2G}\left(\frac{T(x)r}{j}\right)^2 dA\right]dx$$

$$\rightarrow U=\int_0^L \frac{1}{2G}\left(\frac{T(x)}{j}\right)^2\left[\int_A r^2 dA\right]dx=\int_0^L\left[\frac{T^2(x)}{2Gj}\right]dx$$

روش کار مجازی (محاسبه تغییر مکان

محدودیت های روش

۱) سازه باید فقط تحت اثر یک بار متمرکز باشد

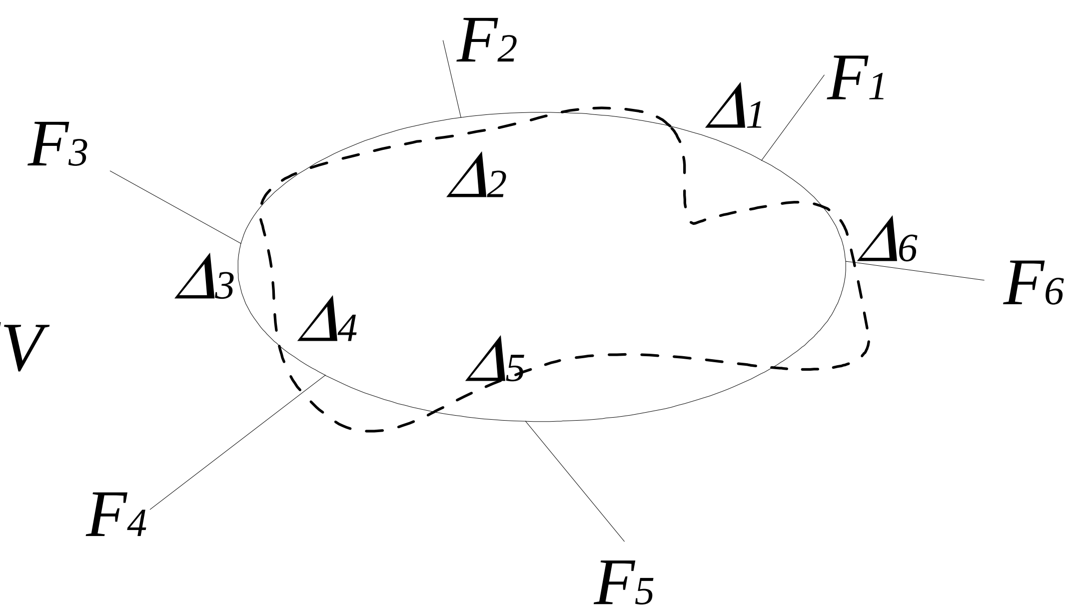
۲) فقط تغییرمکان نقطه تحت اثر نیرو در راستای نیرو قابل محاسبه است.

قضیه دوم کاستیگلیانو

برای جسمی که دارای رفتار الاستیک خطی باشد و درجه حرارت ثابت بماند و تکیه گاه ها فاقد نشست باشند مشتق انرژی داخل جسم نسبت به هرکدام از بارهای خارجی مؤثر بر آن تغییرمکان نقطه تحت اثر بار را در راستای همان نیرو نشان میدهد.

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(F\Delta)_i$$

$$U=\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i+\frac{1}{2}\tau_i\gamma_i\right)dV$$



فرض میکنیم نیروی F به اندازه dF رشد کند

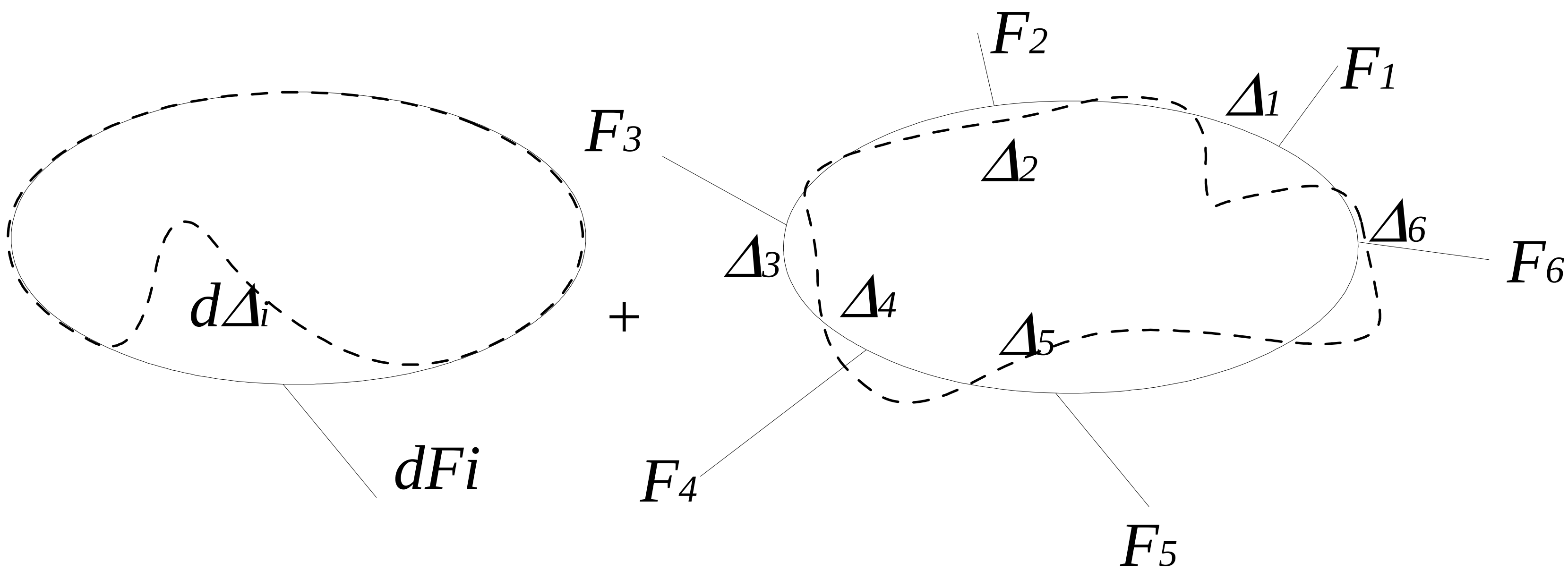
$$U_1 = U + dU$$

$$U_1 = U + \frac{\partial U}{\partial F} dF$$

محاسبه W_1

برای جسمی که دارای رفتار الاستیک خطی است مقادیر W و U تابع وضعیت نهایی بارهای خارجی می باشند و تقدم و تاخر نیروهای خارجی تاثیری در محاسبه کار و انرژی ندارد.

ابتدا فرض میکنیم که فقط نیروی dFi به سیستم وارد شود و سپس سایر نیورها به سیستم اضافه شوند.



$$W^*{}_1 = \frac{1}{2} dF_i d\Delta_i \qquad W^*{}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i\Delta_i + dF_i\Delta_i$$

$$W^* = W_1^* + W_2^* = \underbrace{\frac{1}{2} dF_i d\Delta_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i\Delta_i + dF_i\Delta_i$$

به دلیل مرتبه دو بودن از آن صرفنظر میکنیم.

$$W^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i\Delta_i + dF_i\Delta_i$$

$$\rightarrow W^* = W + dF_i\Delta_i$$

$$U_1 = W^*$$

$$U + \frac{\partial U}{\partial F} dF = W + dF_i \Delta_i$$

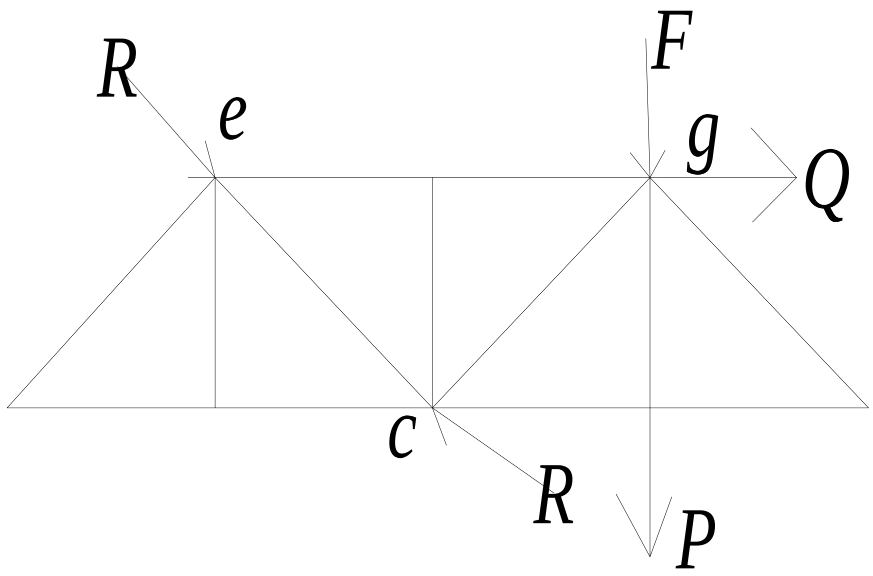
$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

به همین منوال برای خمش نیز میتوان به شکل زیر بدست اورد

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

که با جایگذاری U در معادله بالا و دیفرانسیل گیری از داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^L \frac{1}{E} M \frac{\partial M}{\partial M_A} dx$$



نکاتی درباره قضیه دوم کاستیگلیانو

۱)محاسبه تغییرمکان افقی نقطه g

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta_g^H$$

۲) محسبه تغییرمکان قائم نقطه g

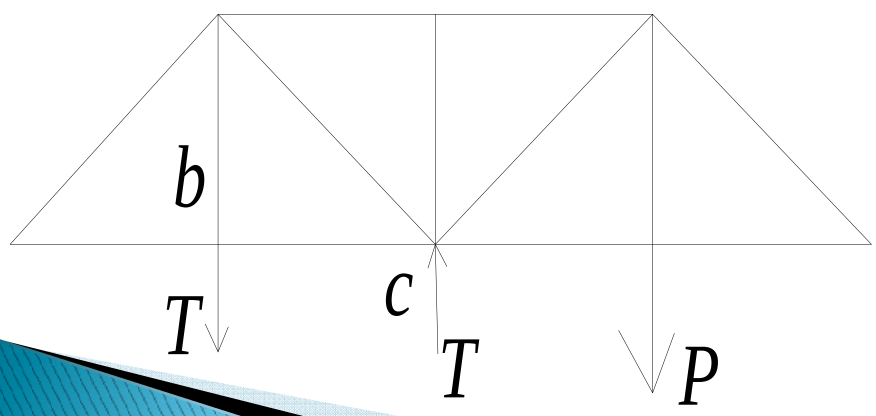
$$\frac{\partial U}{\partial F} = \Delta_g^V$$

۳) میزان نزدیک شدن نقاط c و e

$$\Delta_{ec} = \Delta_e + \Delta_c$$

$$\Delta_e + \Delta_c = \frac{\partial U}{\partial R}$$

۴) میزان دوران عضو bc



$$\theta = \frac{\Delta_b + \Delta_c}{L}$$

$$\Delta_b + \Delta_c = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_{P=0.0}$$

روش کار مجازی

سیستم تغییرشکل تیر زیر را تحت اثر نیروها متعادل $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ در نظر میگیریم. در این صورت تنش های $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ و کرنش های $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$ در جسم ظاهر می شود. اگر تغییر مکان نقاط تحت بار خارجی را به ترتیب $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ نشان دهیم خواهیم داشت.

خارجی داخلی

$$\boxed{\begin{matrix} F_i \\ \Delta_i \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} \sigma_i & \tau_i \\ \varepsilon_i & \gamma_i \end{matrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} W_I &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(F\Delta)_i \\ U_I &= \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i + \frac{1}{2}\tau_i\gamma_i\right)dV \end{aligned}\right\} \quad W_I = U_I$$

اکنون همان جسم را تحت اثر مجموعه دیگر از نیروها در نظر بگیرید، نیروهای

جدید را با $F_1^*, F_2^*, F_3^*, \ldots, F_n^*$ و تغییرمکان های آن را با $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \Delta_3^*, \ldots, \Delta_n^*$

نشان میدهیم. همچنین تنشها و کرنشها را بالا نویس* مشخص میکینم.

خارجی داخلی

$$\boxed{\begin{matrix} F_i^* \\ \Delta_i^* \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} \sigma_i^* & \tau_i^* \\ \varepsilon_i^* & \gamma_i^* \end{matrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} W_{II} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(F\Delta)_i^* \\ U_{II} &= \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_i^*\varepsilon_i^* + \frac{1}{2}\tau_i^*\gamma_i^*\right)dV \end{aligned}\right\} \quad W_{II} = U_{II}$$

اکنون حالت سومی را در نظر بگیرید که در آن ابتدا نیروهای ستاره دار به سازه اثر کنند و سپس در حضور آنها نیروهای بدون ستاره * به جسم اعمال شودم. در این صورت کار و انرژی (Uو W) به صورت زیر محاسبه میشود.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(F\Delta)_i^* + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(F\Delta)_i + \sum_{i=1}^{n}\left(F_i^*\Delta_i\right)$$

$$W = W_I + W_{II} + \sum_{i=1}^{n}\left(F_i^*\Delta_i\right)$$

بطریق مشابه

$$U = U_I + U_{II} + \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_i^*\varepsilon_i + \frac{1}{2}\tau_i^*\gamma_i\right)dV$$

اعمال رابطه کار مجازی

$$U = W$$

$$\cancel{U_I} + \cancel{U_{II}} + \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_i^* \varepsilon_i + \frac{1}{2}\tau_i^* \gamma_i \right) dV = \cancel{W_I} + \cancel{W_{II}} + \sum_{i=1}^{n} \left(F_i^* \Delta_i \right)$$

یعنی کار خارجی نیروهای سیستم II در اثر تغییرشکلهای خارجی سیستم I

برابر است با کار نیروهای داخل سیستم II در اثر تغییرشکل های داخلی I

سیستم

نیروهای (*) دارای نیروهای مجازی و تغییرشکل های بدون (*) تغییرشکل های

حقیقی هستند.

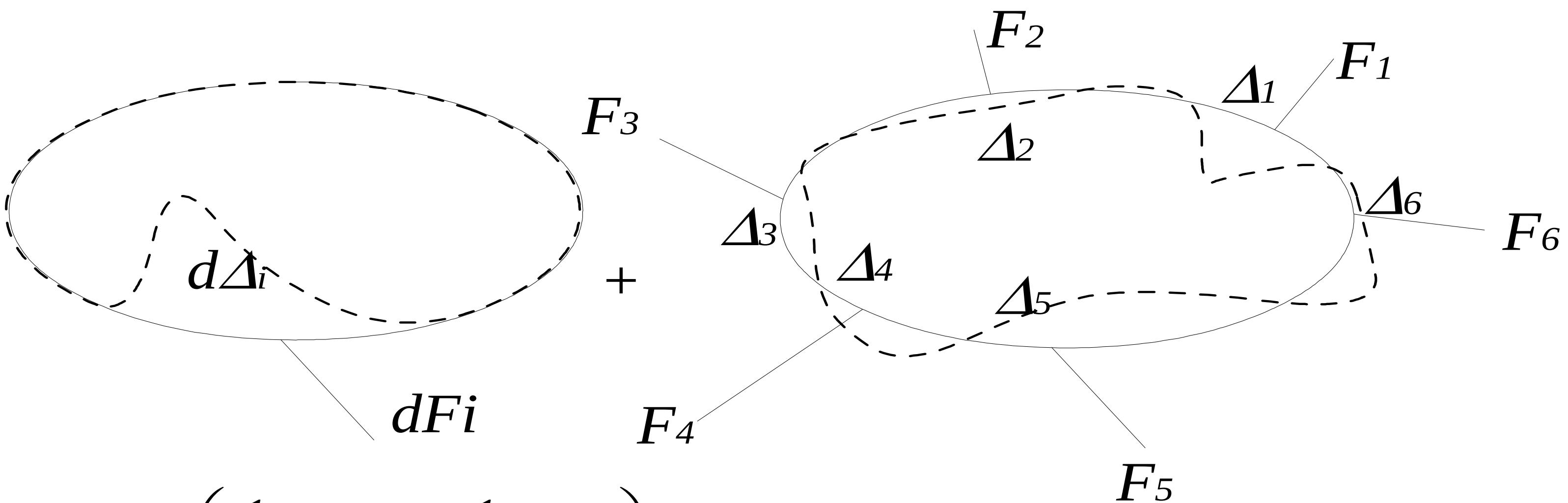
سیستم II سیستم نیروی مجازی نامیده میشود.

سیستم I سیستم تغییرشکل حقیقی همساز نام دارد.

روش بار واحد

سازه شکل مقابل را تحت اثر نیروهای $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ در نظر بگیرید فرض کنید

میخواهیم تغییر مکان نقطه A را در جهت نشان داده شده محاسبه کنیم



اکنون رابطه کار مجازی به صورت زیر خواهد بود

$$1^* \times \Delta = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_i^* \varepsilon_i + \frac{1}{2} \tau_i^* \gamma_i \right) dV$$

جهت ساده کردن رابطه فوق ابتدا روی مقطع عرضی عضو انتگرال میگیریم و سپس روی طول عضو

$$1^* \times \Delta = \int_L N^* d\Delta + \int_L M^* d\theta + \int_L V^* d\lambda + \int_L T^* d\phi$$

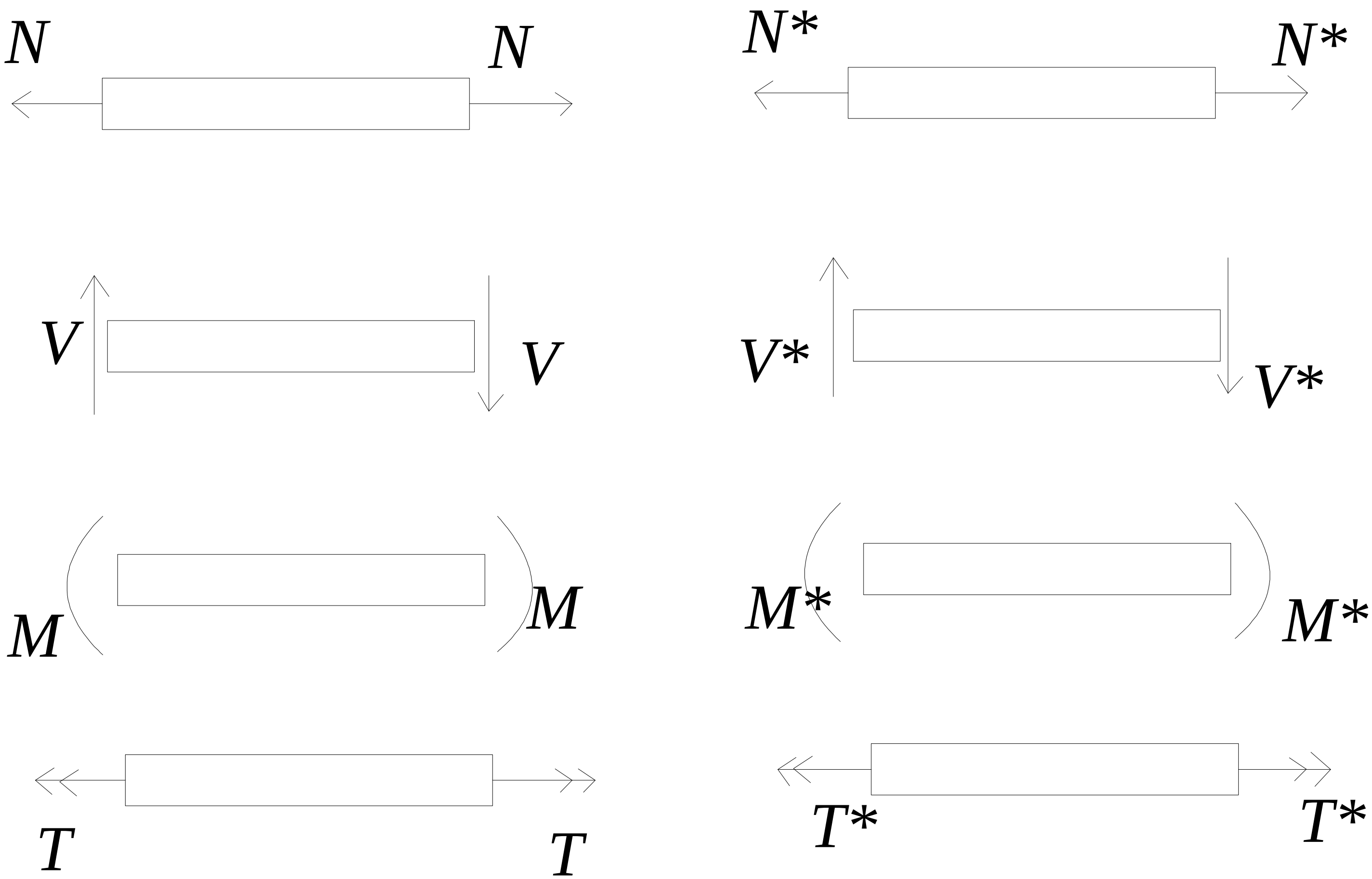
سیستم حقیقی　　　　سیستم مجازی

$$d\Delta = \frac{Ndx}{AE}$$

$$d\lambda = \frac{Vdx}{G\bar{A}}$$

$$d\theta = \frac{Mdx}{EI}$$

$$d\phi = \frac{Tdx}{GJ}$$



با جایگذاری نیروها و تغییرمکانهای فوق در رابطه بالا عبارت زیر نتیجه میشود.

$$1^* \times \Delta = \int_L \frac{NN^*}{AE}dx + \int_L \frac{MM^*}{EI}dx + \int_L \frac{VV^*}{G\bar{A}}dx + \int_L \frac{TT^*}{GJ}dx$$

نکته: مسحت زیر منحنی تابع بدون (*) ضربدر مقدار تابع (*) دار در محل مرکز سطح تابع بدون (*) برابر با انتگرال های بالا میباشد.

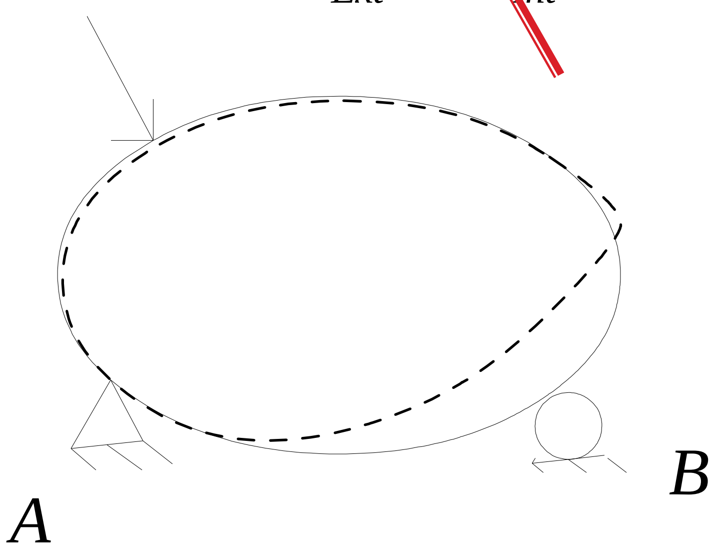
اثر نشست در تغییرمکان های سازه

در سازه های معین نشست تکیه گاهی در اعضا تنش و کرنش ایجاد نمیکنند.

میخواهیم تغییرمکان نقطه دلخواه i را در اثر نشست تکیه‌گاهی مجاسبه کنیم

چون سازه معین

$$W_{Ext} = \cancel{W_{Int}} = 0.0$$



$$E_{EXt} = 0.0 \rightarrow 1^{*} \times \Delta_i + B_y^{*}\left(-\Delta_B\right) = 0.0$$

$$\Delta_i = B_y^{*}\left(\Delta_B\right)$$