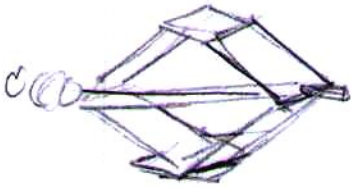
اصول :

۱. نیرو: عاملی که باعث تغییر سرعت و یا تغییر شکل جسم می شود و کمیت است برداری

۲. انواع نیرو: در طبیعت یا نیروی سطحی است: فشار آب پشت سد
فشار خاک پشت دیوار حائل
نیرویی که به سطح فشار وارد می کند

نیروی حجمی: وزن (جاذبه بین اجسام کل جرم)
نیروی شتاب کل حجم جسم



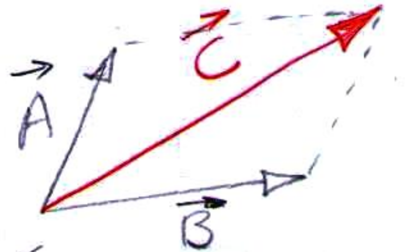
نیروی متمرکز: برای سادگی در محاسبات نیروی گسترده که در یک سطح کوچک و یا حجم کوچک وارد می شود را باید نیرویی که به یک نقطه اثر می کند جایگزین می کنیم.

۳. جسم صلب: در استاتیک اجسام صلب هستند یعنی تغییر شکلی ندارند.

۴. اصل برآیند: اگر بر جسمی چند نیرو وارد می شود می توان جمع آن نیروها را که برآیند نامیده می شود را بدست آورد و جسم را تحت اثر نیروی برآیند بررسی کرد.

۵. اصل جمع بردارها (قانون متوازی الاضلاع):

به جای دو نیرو که به ذره اثر می کنند، می توان یک نیروی واحد به نام برآیند را قرار داد که از رسم قطر متوازی الاضلاعی که بدست می آید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی معلومند.



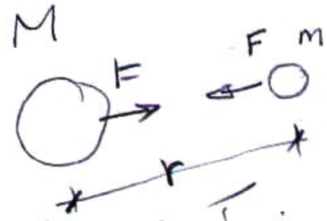
۶- قانون اول نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر صفر باشد اگر جسم در حال سکون است، ساکن و اگر در حال حرکت است به حرکت یکنواخت خود بر روی یک خط راست ادامه می دهد.

۷. قانون دوم نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر نباشد جسم در امتداد نیروی برآیند و متناسب با مقدار آن شتاب می گیرد

$F = ma$

۸- قانون سوم نیوتن: اگر دو جسم که با هم در تماس هستند به هم نیرو وارد کنند، نیروهایی که این دو جسم به هم وارد می کنند در یک راستا (امتداد) و با یک مقدار است و در خلاف هم.

۹- قانون گرانش نیوتن:



$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

۱۰- اصل نیروی صفر: اگر بر سیستمی که در حال تعادل است نیرویی که هم ارز صفر است را اضافه کنیم در تعادل جسم تغییری بوجود نخواهد آمد.

سیستم اندازه گیری: برای آنکه اندازه گیری یکسان شود نیاز به معرفی سیستم اندازه گیری است. که در زمانهای گذشته هر کشور، شهر و یا قومی واحدهای اندازه گیری اختصاصی خود را داشت. مثلاً در کشور ما برای اندازه گیری طول از "زرع" و برای اندازه گیری جرم از "من" استفاده می شد

در حال حاضر در دنیا چند واحد اندازه گیری مشهور وجود دارد SI - cgs

(انگلیسی) US-Costumer

در فیزیک نه کمیت اصلی برای اندازه گیری وجود دارد که سایر کمیت ها به صورت ترکیبی از آنهاست.

	SI	cgs	BS	US
طول	m	cm	ft	ft
جرم	kg	gr	Pound mass	Slug or Pound mass
زمان	s	s	s	S

دما

مقدار ماده

جریان الکتریکی

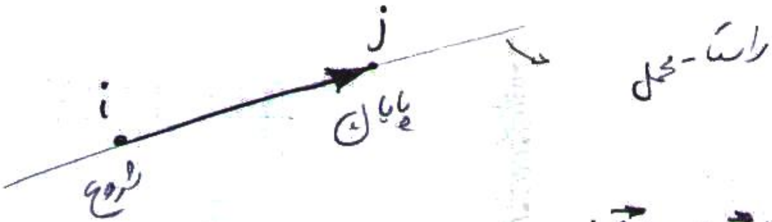
شدت روشنایی

زاویه هندسی (مسطح)

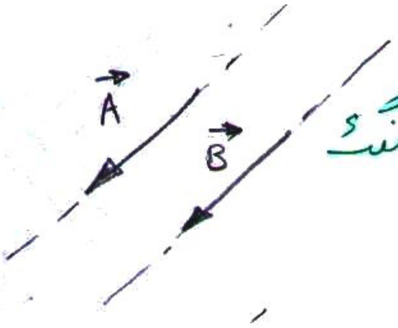
زاویه فضایی

جبر برداری:

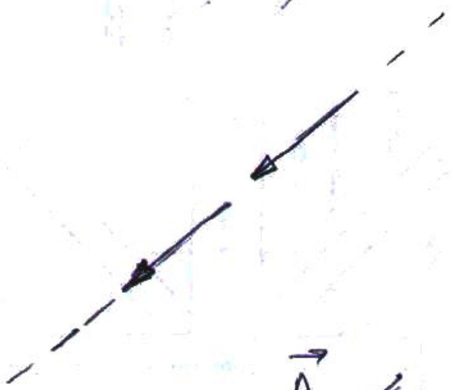
۱. بردار: پاره خطی است جهت دار که ابتدا و انتهای آن و نیز مقدار آن مشخص است.



$|\vec{A}| = |\vec{B}|$

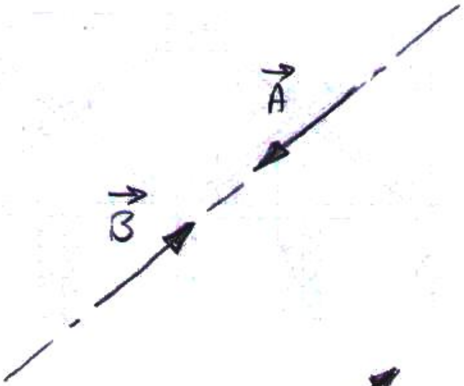


هم سنگ



هم ارز:

معادل



متقابل

کوپل

انواع بردار

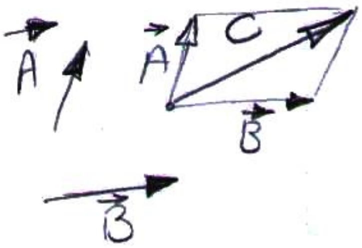
آزاد: ریاضی بردار را در هر امتدادی می‌توان جابجا کرد.

لغزان: فقط در امتداد بردار (روی محمل) قابل جابجایی است.

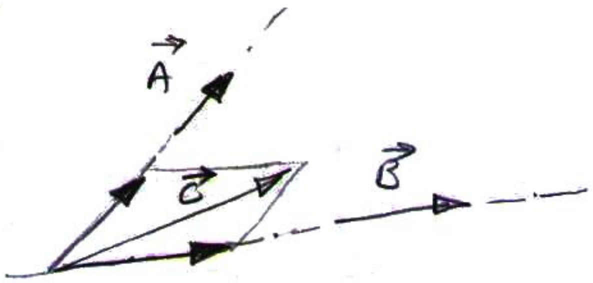
بسته: قابل جابجایی نیست و محمل آن ثابت است.

جمع دو بردار

زمانی می‌توان دو بردار را باهم جمع کرد که همنوع باشند



الف) آزاد

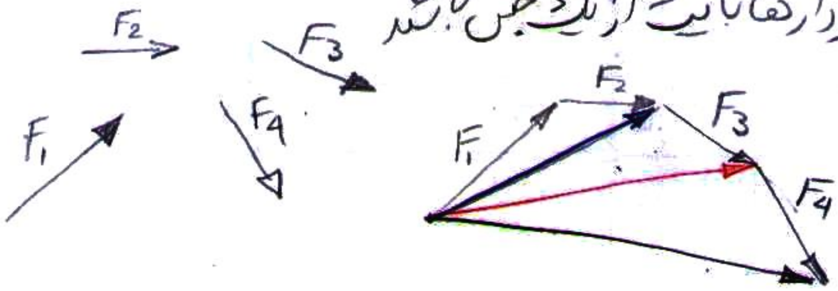


ب) لغزان

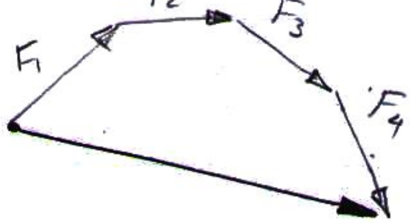
ج) بسته وقتی می‌توان دو بردار بسته را جمع کرد که مبدأشان یکی باشد.

جمع چند بردار

بردارها باید از یک جنس باشند



الف) آزاد

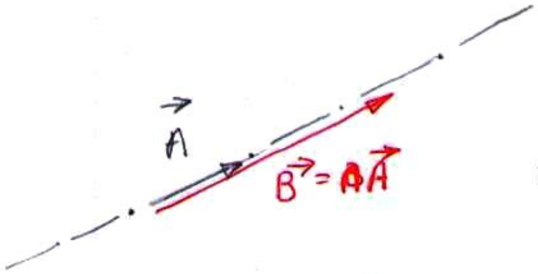


زنجیره نیرو

ب) بردارهای لغزان را وقتی می‌توان باهم جمع کرد که جمع بردارهای انجام شده حداقل یک بردار را قطع کنند

ج) چند بردار بسته وقتی عملی است که بردارها مبداشان یکسان باشد.

ضرب یک اسکالر در یک بردار



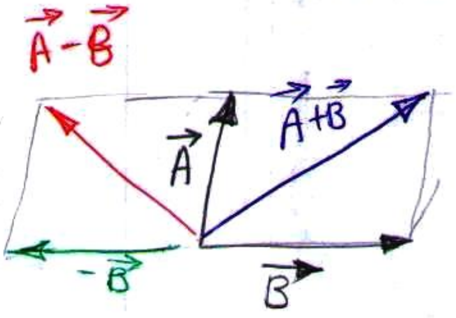
$$n|\vec{A}| = |\vec{B}|$$

اگر $n > 0$ (مثبت) B هم جهت با A

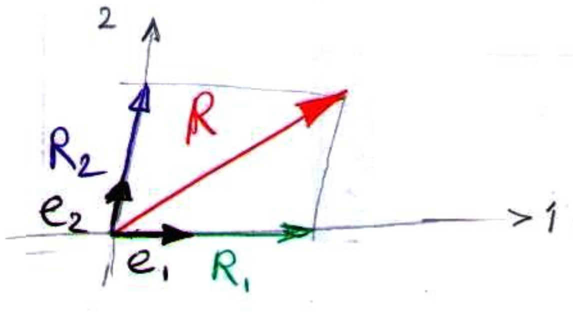
اگر $n < 0$ (منفی) B درخلاف جهت A

تفاضل دو بردار:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C} \Rightarrow \vec{A} + (-1\times\vec{B}) = \vec{C}$$



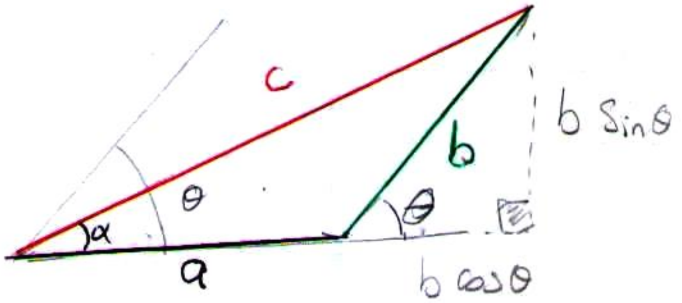
تجزیه بردار به مولفه ها



$$\vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2}$$

$$\vec{R} = n_1\vec{e_1} + n_2\vec{e_2}$$

یادآوری از مثلثات و هندسه



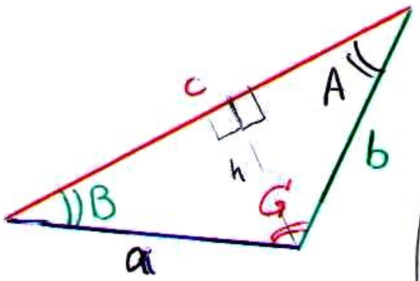
$$c^2 = (a + b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ab\cos^2\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

$$c^2 = a^2 + 2ab\cos\theta + b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$c^2 = a^2 + 2ab\cos\theta + b^2$$

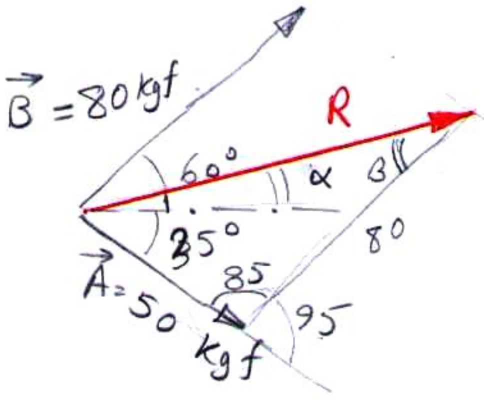
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$



$$h = a\sin B = b\sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

مثال: مطلوبست تعیین برآیند نیروهای زیر



$$R = \sqrt{50^2 + 80^2 + 2 \times 50 \times 80 \times \cos(60+35)}$$

$$R = 90.57\ kgf$$

$$\frac{90.57}{\sin 85°} = \frac{50}{\sin B} = \frac{80}{\sin(35+\alpha)} \Rightarrow \sin(35+\alpha) = \frac{80}{90.57}\sin 85°$$

$$\sin(35+\alpha) = 0.88667$$

$$35+\alpha = 62.46°$$

$$\underline{\alpha = 26.63°}$$

ضرب داخلی دو بردار: کمیتی است اسکالر که مقدار آن برابر است با حاصل ضرب طول دو بردار و کسینوس زاویه بین دو بردار

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار که موازی 1

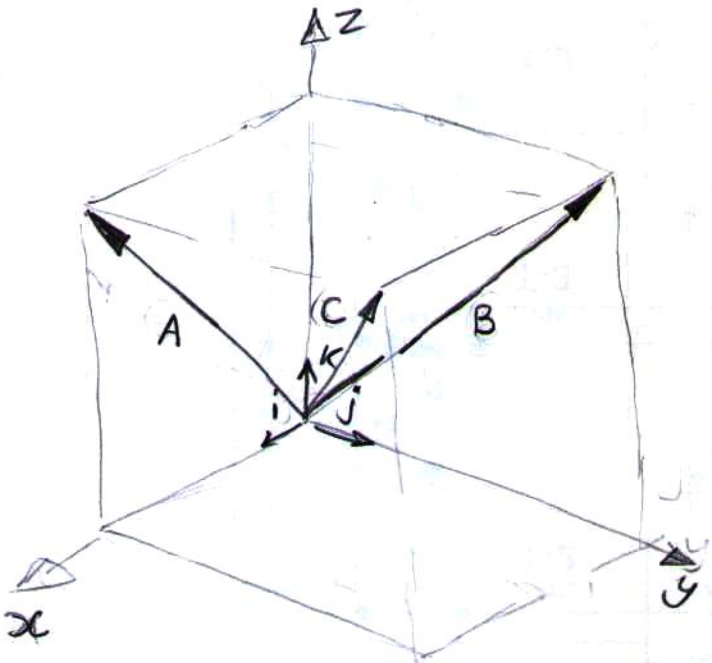
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

" " " عمود برهم 0 است

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \times B_x + A_y \times B_y + A_z \times B_z$$

اگر حاصل ضرب داخلی و طول دو بردار معلوم باشد می‌توان زاویه بین دو بردار را پیدا کرد



در شکل مقابل که مکعبی به ضلع 5 متر می‌باشد

مطلوب زاویه بین بردارهای A و B

" " " A , C

" بین بردار C و بردارهای $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

حل:

$$\vec{A} = 5\vec{i} + 5\vec{k}$$
$$\vec{B} = 5\vec{j} + 5\vec{k}$$
$$\vec{C} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|A| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$
$$|B| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$
$$|C| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cos(\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A| \cdot |B|}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (5\vec{i}+0\vec{j}+5\vec{k})\cdot(0\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}) =$$

$$= 5\underbrace{(0\times1+5\times0+5\times0)}_{0} + 0\,(0\times0+5\times1+5\times0) + 5\underbrace{(0\times0+5\times0+5\times1)}_{5}$$

$$= 0+0+5\times5 = 25$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A|\cdot|B|} = \frac{25}{(5\sqrt{2})(5\sqrt{2})} = \frac{25}{25\times2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = 0\times5+5\times5+5\times5 = 25+25 = 50$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{C}}{|A|\cdot|C|} = \frac{50}{(5\times\sqrt{2})(5\sqrt{3})} = \frac{50}{25\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}} = 35.264^\circ$$

$$l = \cos(\vec{C},\vec{i}) = \frac{\vec{C}\cdot\vec{i}}{|C|\cdot|i|} = \frac{5}{5\sqrt{3}\times1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \angle \vec{C},\vec{i} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 54.736^\circ$$

$$m = \cos(\vec{C},\vec{j}) = \frac{\vec{C}\cdot\vec{j}}{|C|\cdot|j|} = \frac{5}{5\sqrt{3}\times1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = \cos(\vec{C},\vec{k}) = \frac{\vec{C}\cdot\vec{k}}{|C||k|} = \frac{5}{5\sqrt{3}\times1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

خواص ضرب داخلی :

ضرب اسکالر

$$(m\vec{A})\cdot(n\vec{B}) = |m\vec{A}||n\vec{B}|\cos(m\vec{A}, n\vec{B})$$

$$= (mn)|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B}) = (mn)(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\boxed{(m\vec{A})\cdot(n\vec{B}) = (mn)\,\vec{A}\cdot\vec{B}}$$

جابجائی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}} = |A||B|\cos(\vec{A},\vec{B}) = |B||A|\cos(\vec{B},\vec{A})$$

خاصیت پخش ضرب داخلی در جمع

$$\boxed{\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}}$$

طول بردار تصاویر

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\cos(0) = |\vec{A}|^2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

طول بردار

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

تصویر یک بردار روی یک امتداد.

$\vec{C}\ ,\ \vec{s}$

$\vec{s}$ بردار یکه روی امتداد s

$$C_s = \vec{C}\cdot\vec{s} = |\vec{C}||1|\cos(\vec{C},\vec{s}) = |\vec{C}|\cos(\vec{C},\vec{s})$$

بدست آوردن بردار یکه یک امتداد

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$$

$$C_x = \vec{C}\cdot\vec{i} \qquad C_y = \vec{C}\cdot\vec{j} \qquad C_z = \vec{C}\cdot\vec{k} \;;\; |\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

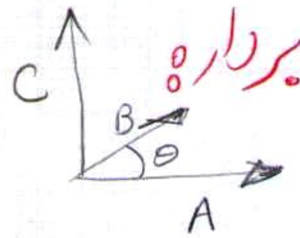
$$\vec{e}_c = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}}{|\vec{C}|} = \underbrace{\frac{C_x}{|\vec{C}|}}_{l}\vec{i} + \underbrace{\frac{C_y}{|\vec{C}|}}_{m}\vec{j} + \underbrace{\frac{C_z}{|\vec{C}|}}_{n}\vec{k}$$

$$\vec{e}_c = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

کسینوس دایرکتور بردار C

$$|\vec{e}_c|^2 = 1 = l^2 + m^2 + n^2$$

ضرب خارجی دو بردار



$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$$

$$|\vec{C}| = |A||B|\sin\theta$$

خاصیت ضد تقارن

$$\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A})$$

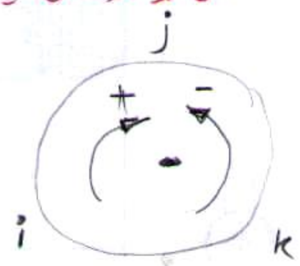
توزیع پذیری ضرب در جمع

$$\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{B}$$

ضرب خارجی بردارهای یکه:

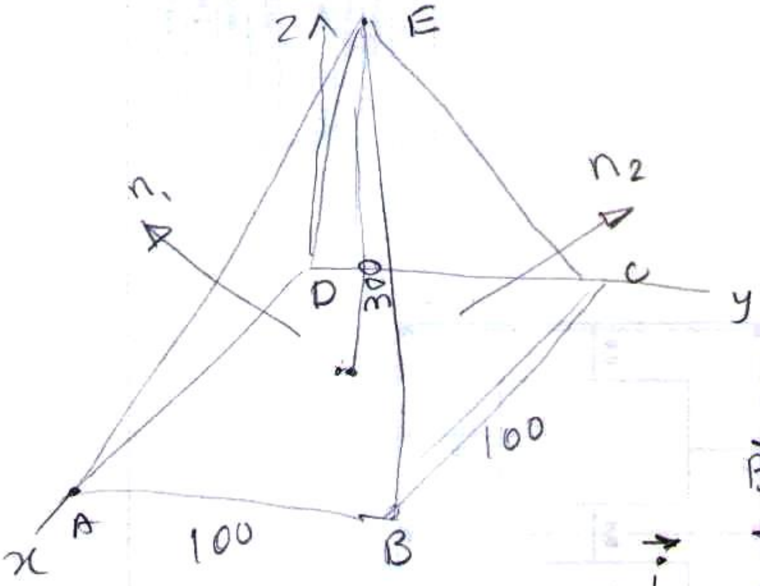
$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{i} = j$$

$$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i}\times\vec{k} = j$$



$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{matrix} (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + \\ (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + \\ (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{array} = A_xB_y\vec{k} + B_xA_z\vec{j} + A_yB_z\vec{k} - B_yA_z\vec{i} - A_xB_z\vec{j} - B_xA_y\vec{k}$$



مثال:

$$\vec{N}_1 = \vec{AB} \times \vec{BE}$$

$$\vec{AB} = 100\vec{j}$$

$$\vec{BE} = -50\vec{i} - 50\vec{j} + 300\vec{k}$$

$$\vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 100 & 0 \\ -50 & -50 & 300 \end{vmatrix} = 30000\vec{i} - (0)\vec{j} + (+50'000)\vec{k}$$

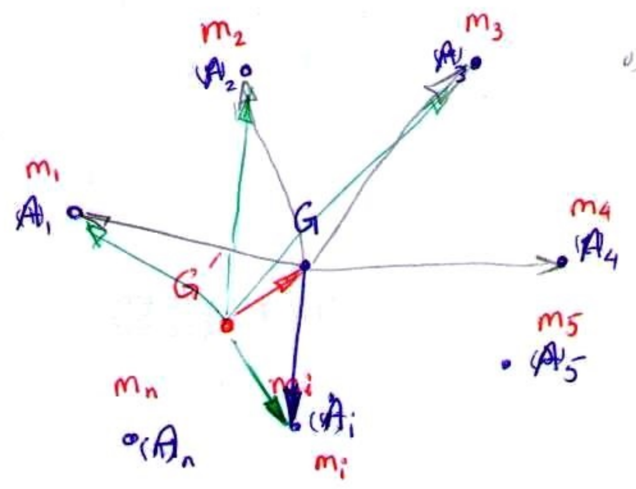
$$n_1 = \frac{\vec{N}_1}{|N|} = \frac{30'000\vec{i} + 50'000\vec{k}}{\sqrt{30'000^2 + 50'000^2}} = 0.5145\vec{i} + 0.8575\vec{j}$$

BC

دستگاه نقاط اسکالر دار

$\sum m_i = M \neq 0$

یک سری نقطه که به هرکدام یک اسکالر نسبت داده می‌شود



$$\sum_{i=1}^{n} m\,\overrightarrow{GA_i} = 0$$

اثبات یکتا بودن

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{G'A_i} = 0$$

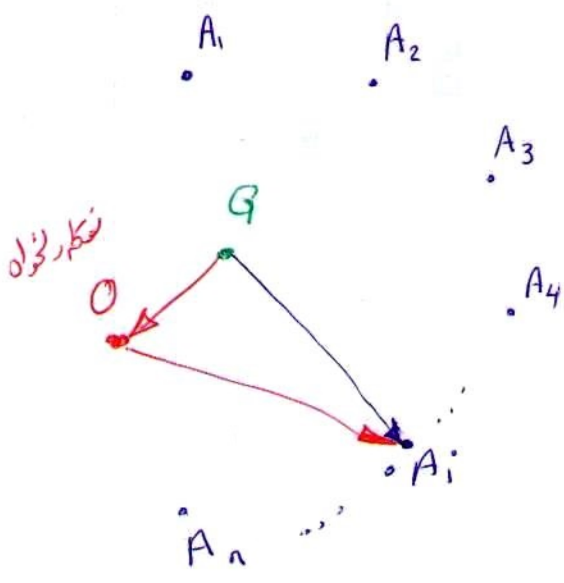
$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA_i}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overrightarrow{G'G} + m_i\,\overrightarrow{GA_i}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{G'G} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{GA_i}}_{0} = 0$$

$$\overrightarrow{G'G}\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \Rightarrow \overrightarrow{G'G} = 0$$

پس تنها یک نقطه به عنوان مرکز وجود دارد

محاسبه G:



$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i} = 0$$

$$\overrightarrow{GO}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{M} + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i} = -M\,\overrightarrow{GO}$$

$$\vec{OG} = -\vec{GO} \Rightarrow \boxed{\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OA_i}}{M}}$$

$$\vec{S_o} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OA}$$ گشتاور استاتیک دستگاه نقاط اسکالر نسبت به نقطه O

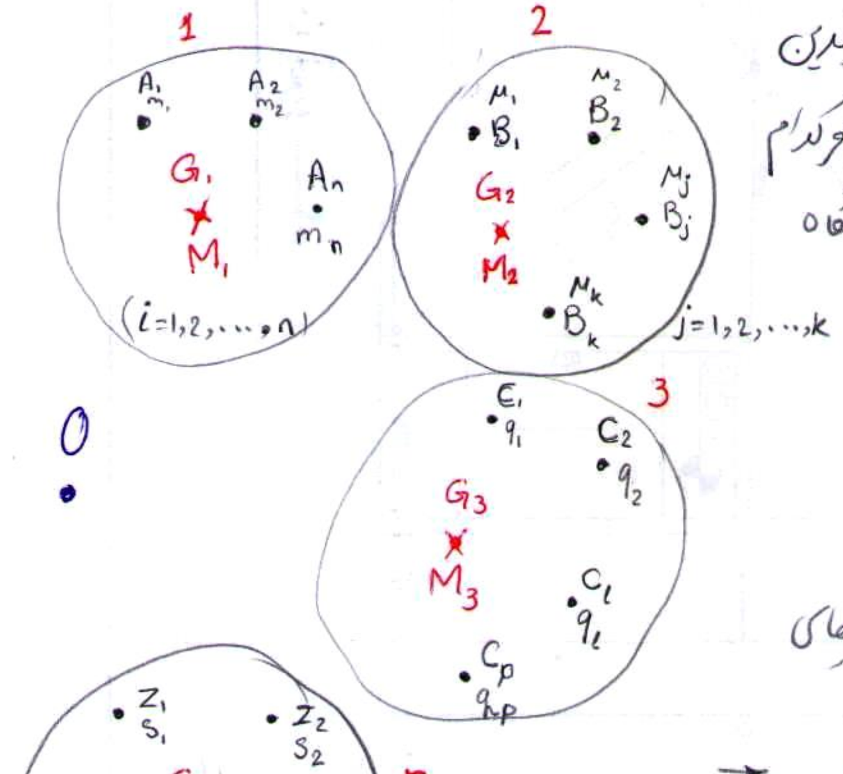
$$\vec{OG} = \frac{\vec{S_o}}{M} \quad , \quad \vec{S_o} = M \cdot \vec{OG}$$

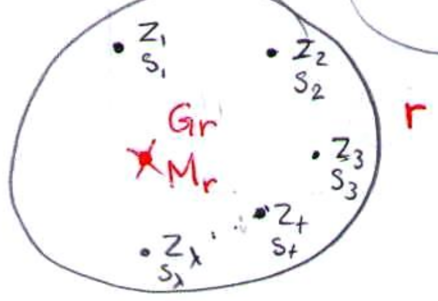
اگر در رابطه فوق O=G بگیریم

$$\vec{S_o} = M \cdot \underbrace{\vec{GG}}_{0} = 0$$

دستگاه نقاط همسان: $m_i = m$

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m} = \frac{m \sum \vec{OA_i}}{n \cdot m} = \frac{\sum \vec{OA_i}}{n}$$





قضیه مرکز چند دستگاه: اگر چندین دستگاه اسکالر داشته باشیم، و مرکز هر کدام از آنها را بدست آوریم و مجموع اسکالر هر دستگاه را به مرکز آن دستگاه نسبت دهیم. برای بدست آوردن مرکز دستگاه کلی که شامل همه نقاط است می‌توان مرکز دستگاهی که متشکل از مراکز و اسکالرهای آنها هست را پیدا کنیم.

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{S_{1o}}}{M_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{\overrightarrow{S_{20}}}{M_2} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \mu_j \overrightarrow{OB_j}}{\sum_{j=1}^{k} \mu_j}$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\overrightarrow{S_{30}}}{M_3} = \frac{\sum_{l=1}^{p} q_l \overrightarrow{OC_l}}{\sum_{l=1}^{p} q_l}$$

$$\overrightarrow{OG_r} = \frac{\overrightarrow{S_{r0}}}{M_r} = \frac{\sum_{t=1}^{\lambda} s_t \overrightarrow{OZ_t}}{\sum_{t=1}^{\lambda} s_t}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{\text{کل نقاط}} m\overrightarrow{OP}}{\sum_{\text{کل نقاط}} m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \overrightarrow{OB_j} + \sum_{l=1}^{p} q_l \overrightarrow{OC_l} + \dots + \sum_{t=1}^{\lambda} s_t \overrightarrow{OZ_t}}{\sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j + \sum_{l=1}^{p} q_l + \dots + \sum_{t=1}^{\lambda} s_t}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_1 \overrightarrow{OG_1} + M_2 \overrightarrow{OG_2} + M_3 \overrightarrow{OG_3} + \dots + M_r \overrightarrow{OG_r}}{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{r} M_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_{i=1}^{r} M_i}}$$

مسئله ۱: ثابت کنید که مرکز دستگاه اسکالردار متشکل از یک نقطه بر همان نقطه منطبق است.

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OA_1}}{m} = \vec{OA_1} \Rightarrow \vec{OG} = \vec{OA}$$

مسئله ۲: ثابت کنید مرکز دستگاه نقاط اسکالردار متشکل از دو نقطه، روی خطی است که از آن دو نقطه می‌گذرد.

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{OA_i}}{m_1+m_2} \Rightarrow \vec{A_1G} = \frac{m_1 \overset{0}{\vec{A_1A_1}} + m_2 \vec{A_1A_2}}{m_1+m_2}$$

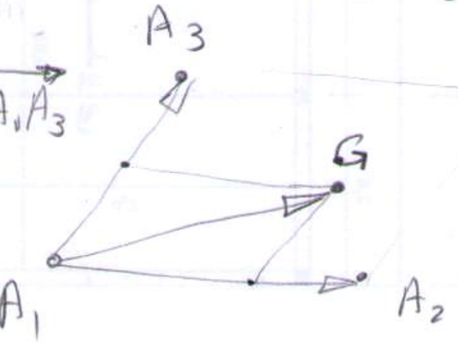
$$\vec{A_1G} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{A_1A_2}$$

مسئله ۳: ثابت کنید مرکز دستگاه نقاط اسکالردار متشکل از سه نقطه روی صفحه‌ای است که از آن سه نقطه [illegible] می‌گذرد.

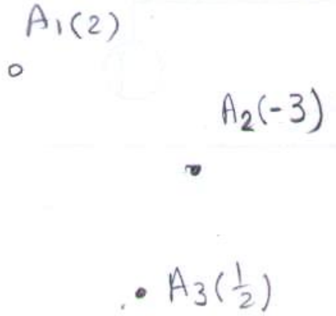
$O = A_1$

$$\vec{A_1G} = \frac{m_1 \overset{0}{\vec{A_1A_1}} + m_2 \vec{A_1A_2} + m_3 \vec{A_1A_3}}{m_1+m_2+m_3} = \frac{m_2 \vec{A_1A_2} + m_3 \vec{A_1A_3}}{m_1+m_2+m_3}$$

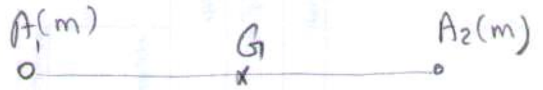
$$\vec{A_1G} = \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} \vec{A_1A_2} + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \vec{A_1A_3}$$



مسئله ۴: مرکز دستگاه نقاط اسکالردار زیر را بدست آورید.

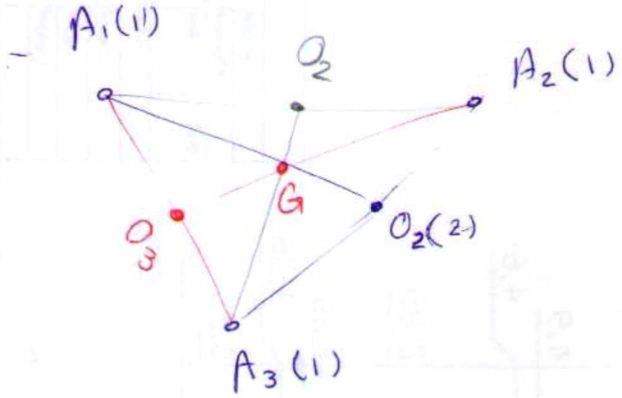


مسئله ۱: مرکز دستگاه نقاط جرمی با دو نقطه را پیدا کنید.



$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{m\,\overrightarrow{A_1A_1} + m\,\overrightarrow{A_1A_2}}{m+m} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}$$

مسئله ۲: مرکز دستگاه نقاط جرمی با سه نقطه بر روی میانه به فاصله $\frac{1}{3}$ است.

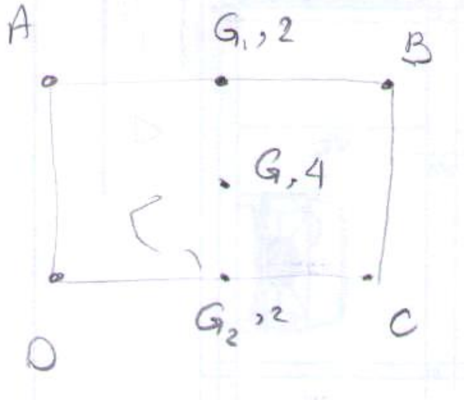


مسئله 3: اگر نقطه G محل تلاقی میانه های مثلث A_1، A_2، A_3 باشد ثابت کنید.

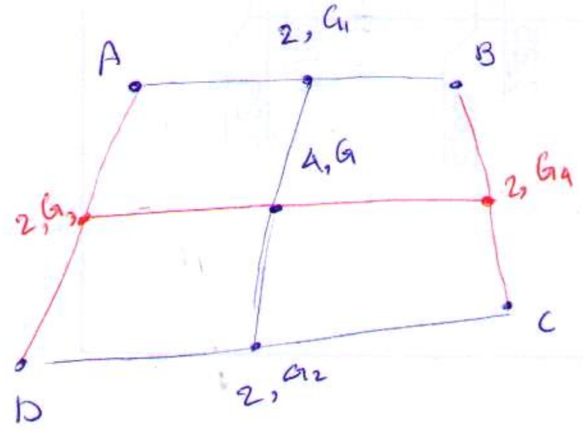
$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}=0$$

گشتاور استاتیکی هر سیستم نقاط اسکالردار نسبت به مرکز ثقل صفر است

مسئله 4:



مسئله ۵:



فرم مختصاتی رابطه مرکز دستگاه نقاط :

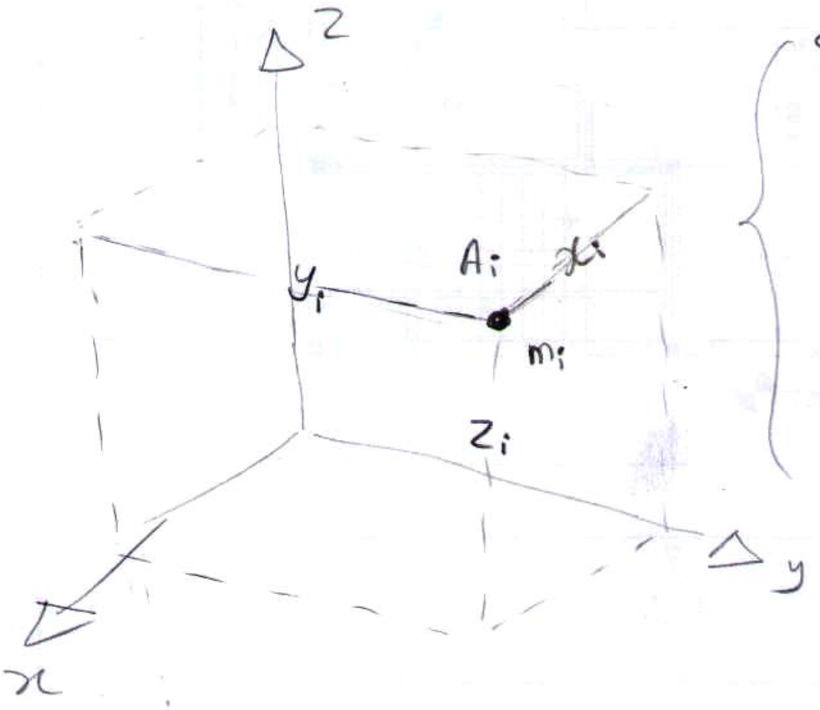
اگر نقطه دلخواه O را مبداء مختصات دستگاه بگیریم می توانیم رابطه :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$G: \begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\[2ex] y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\[2ex] z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \end{cases} \quad (a)$$

گشتاور استاتیک در دستگاه مختصات سه بعدی



$$\begin{cases} S_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \\[2ex] S_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \\[2ex] S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \end{cases} \quad (b)$$

نتیجه ۱:

$$\begin{cases} S_{yz}=M\cdot x_G \\ S_{zx}=M\cdot y_G \\ S_{xy}=M\cdot z_G \end{cases}$$

نتیجه ۲: اگر دستگاه مختصاتی از مرکز نقاط اسکالر دار عبور کند گشتاور استاتیک دستگاه نقاط صفر خواهد شد.

دستگاه نقاط پیوسته: اگر بجای نقاط محدود محیط پیوسته باشد. می توان محیط را به تعدادی قسمت تقسیم کرد که هر کدام را Δm_i نامید و مقدار اسکالر آن را به وسطش نسبت داد.

$$x_G=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(\Delta m)_i}{\sum_{i=1}^{n}(\Delta m)_i}$$

اگر تقسیم ها را زیاد کنیم $(n\to\infty)$
جمع های صورت و مخرج به انتگرال تبدیل می شود.

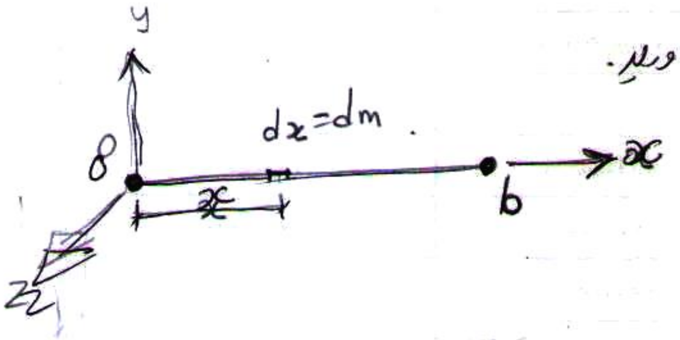
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\int x\,dm}{\int dm} \\[2ex] y_G=\dfrac{\int y\,dm}{\int dm} \\[2ex] z_G=\dfrac{\int z\,dm}{\int dm} \end{cases}$$

$$M=\int dm \qquad S_{yz}=\int x\,dm \qquad S_{zx}=\int y\,dm \qquad S_{xy}=\int z\,dm$$

دستگاه اسکالردار مسطح: اگر تمام دستگاه اسکالردار، در یک صفحه قرار گیرد به آن دستگاه اسکالردار مسطح گوئیم. مثلاً اگر تمام دستگاه در صفحه xy قرار گیرد

$$S_{yo}=\int x\,dm \qquad S_{ox}=\int y\,dm \quad , \quad S_{xy}=0$$

مسئله ۱: مرکز یک خط مستقیم را بدست آورید.



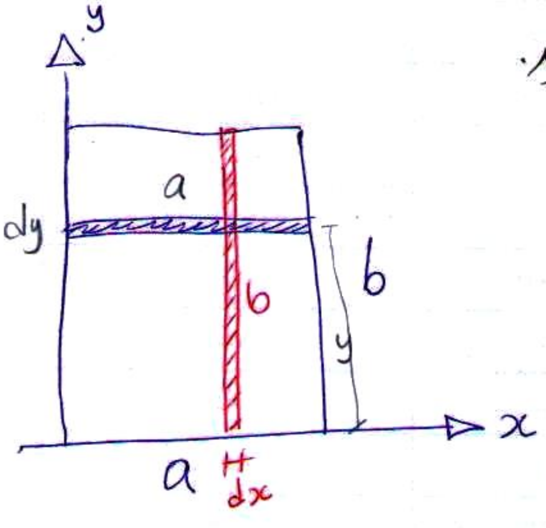
$$dS_{yz}=x\cdot dm=x\,dx$$

$$S_{yz}=\int_0^b x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^b=\frac{b^2}{2}$$

$$x_G=\frac{S_{yz}}{M}=\frac{b^2/2}{b}=\frac{b}{2}$$

مرکز خط پیوسته در وسط آن قرار دارد

مسئله ۲: مرکز سطح یک مستطیل را بدست آورید.



با نوارهای افقی

$$dm=a\,dy$$

$$S_{zx}=\int_0^b y\,dm=\int_0^b y\,a\,dy=a\int_0^b y\,dy$$

$$=a\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^b=a\,\frac{b^2}{2}$$

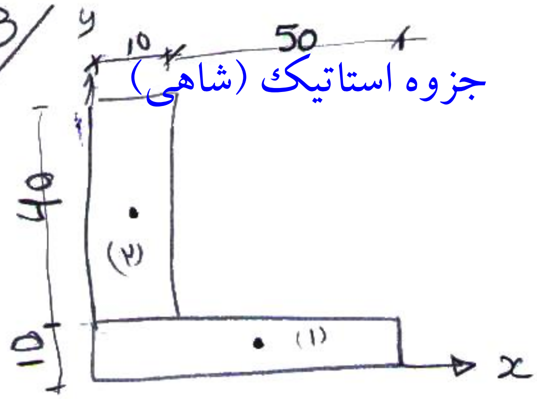
$$M=\int_0^b dm=\int_0^b a\,dy=a\,y\Big|_0^b=ab$$

$$y_G=\frac{S_{zx}}{M}=\frac{ab^2/2}{ab}=\frac{b}{2}$$

با نوار قائم

$$dm=b\,dx \qquad S_{zx}=\int_0^a \frac{b}{2}\cdot b\,dx=\frac{b^2}{2}\int_0^a dx=\frac{ab^2}{2}$$

$$y_G=\frac{\frac{ab^2}{2}}{ab}=\frac{b}{2}$$

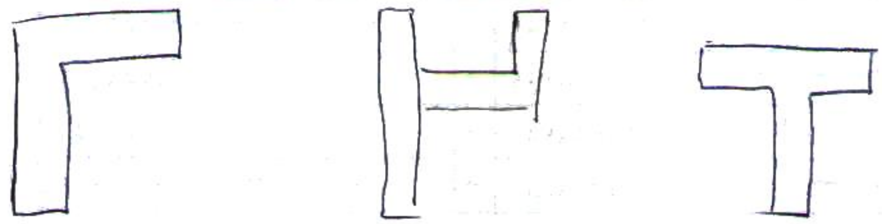


مثال: مرکز سطح مقطع مقابل را بدست آورید.

$$1\begin{cases} x_1 = \frac{60}{2} = 30 \\ y_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ A = M = 10 \times 60 = 600 \end{cases} \qquad 2\begin{cases} x_2 = \frac{10}{2} = 5 \\ y_2 = 10 + \frac{40}{2} = 30 \\ A \doteq M = 40 \times 10 = 400 \end{cases}$$

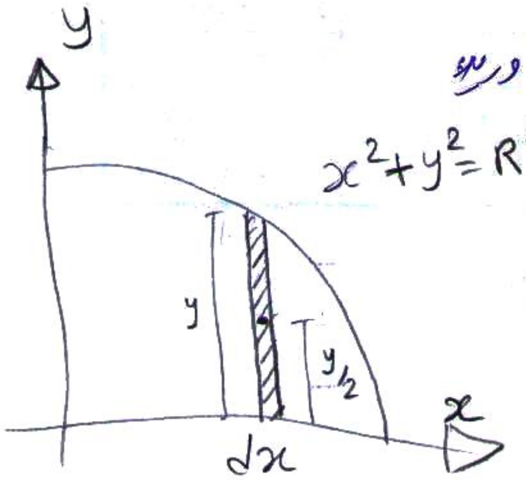
$$x_G = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{30 \times 600 + 5 \times 400}{600 + 400} = \frac{20000}{1000} = 20$$

$$y_G = \frac{\sum y_i m_i}{\sum M_i} = \frac{5 \times 600 + 30 \times 400}{1000} = 15$$



چند تا مثال

مثال: مرکز سطح ربع دایره مقابل را بدست آورید



$$dm = y\,dx = \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

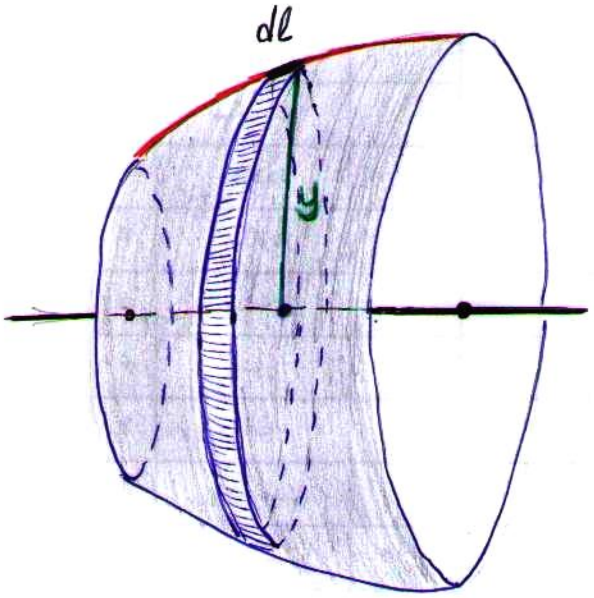
$$S_x = \int_0^R \frac{y}{2}\,dm = \frac{1}{2}\int_0^a (R^2 - x^2)\,dx$$

$$S_x = \frac{1}{2}\left\{ R^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^a \right\} = \frac{1}{2}\left\{ R^3 - \frac{R^3}{3} \right\} = \frac{R^3}{3}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

کاربرد انتگرال در محاسبه مرکز سطح، جرم، حجم:

$$S_{yz} = \int x\,dm$$
$$S_{zx} = \int y\,dm$$
$$S_{xy} = \int z\,dm$$

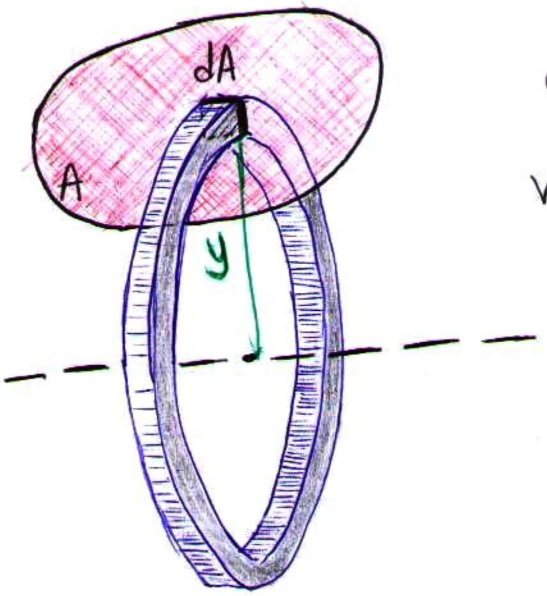


قضیه گلدن - پاپوس:

$$\left(y_G = \frac{\int y\,dl}{L} \right.$$

$$dA = 2\pi y\,dl$$

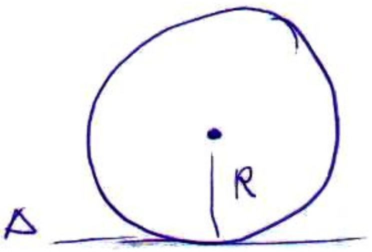
$$A = \int 2\pi y\,dl = 2\pi \underbrace{\int y\,dl}_{y_G \cdot L} = \underline{2\pi\, y_G \cdot L}$$

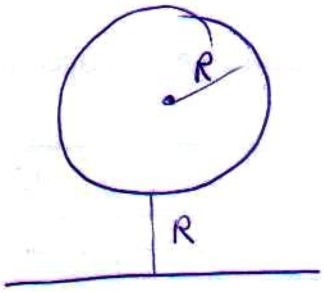


$$dV = 2\pi y \cdot dA$$

$$V = \int 2\pi y\,dA = 2\pi \int y\,dA = 2\pi\, y_G \cdot A$$

مثال: حجم و سطح جانبی شکل های زیر را بدست آورید.





$A = \pi R^2$

$V = 2\pi R(\pi R^2) = 2\pi^2 R^3$

$l = 2\pi R$

$A_r = 2\pi R(2\pi R) = 4\pi^2 R^2$

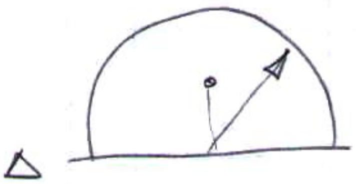
$A = \pi R^2$

$V = 2\pi(2R)\pi R^2 = 4\pi^2 R^3$

$l = 2\pi R$

$A_r = 2\pi(2R)(2\pi R) = 8\pi^2 R^3$

مثال: با استفاده از حجم کره و مساحت نیم دایره مرکز سطح نیم دایره را پیدا کنید.



حجم کره

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

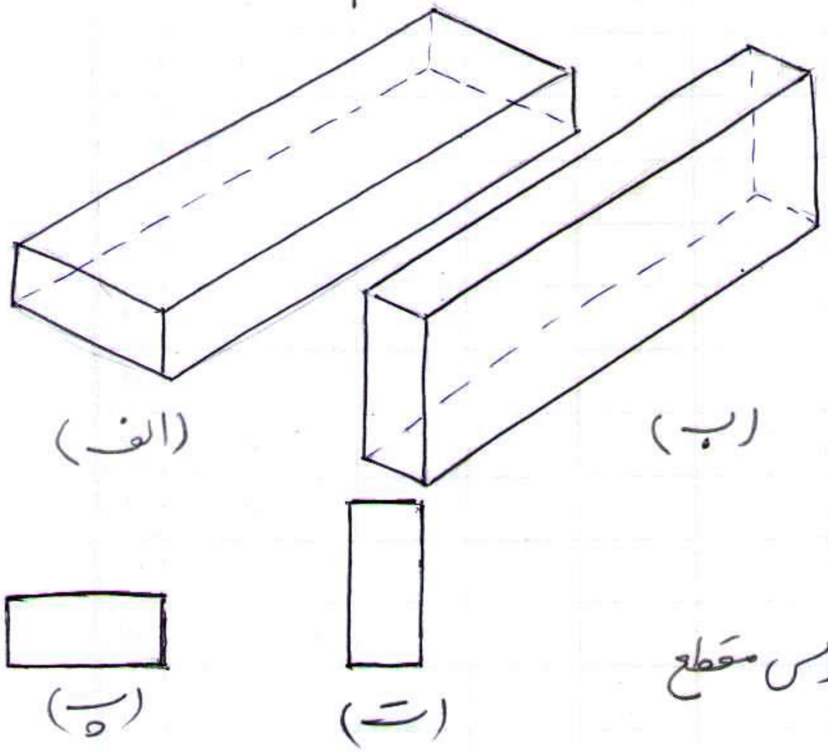
$V = 2\pi \bar{y}\left(\frac{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}}{2}\right) = \frac{4}{3}\cancel{\pi} R^{\cancel{3}}$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}}$$

گشتاور اینرسی: (ممان اینرسی)

در محاسبات خمش و حرکت حول محورهای مختلف در مقاومت مصالح و دینامیک با کمیاتی مواجه می‌شویم که به عنوان گشتاور اینرسی معرفی می‌شوند.

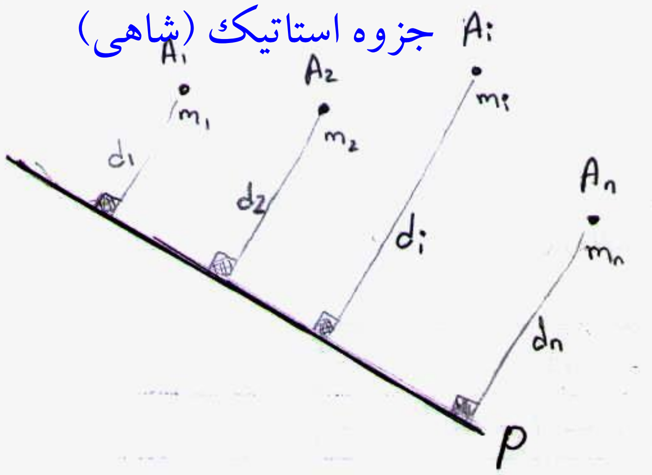
در گشتاور استاتیکی تاثیر محل نقاط یا فاصله آنها نسبت به یک نقطه را بررسی کردیم ولی در آن تاثیر فاصله بصورت خطی (مرتبه اول) است. اما در مورد پدیده‌هایی همچون خمش، پیچش و دوران تاثیر فاصله به صورت توان دوم است.



به عنوان مثال اگر تیری همانند شکل تحت خمش قرار دهیم، در حالت (الف) تیر بیشتر خم می‌شود نسبت به حالت (ب) است.

تفاوت این دو حالت ممان اینرسی مقطع تیر است که در شکلهای (پ) (ت) واضح است.

با توجه به این موارد نیاز به بررسی دقیق‌تر ممان اینرسی را متوجه می‌شوم.



گشتاور دستگاه نقاط اسکالر نسبت به خط: گشتاور اینرسی یک دستگاه نقاط نسبت به خط P به شکل زیر تعریف می‌شود

$$I_P=\sum_{i=1}^{n}(d_i)^2 m_i$$

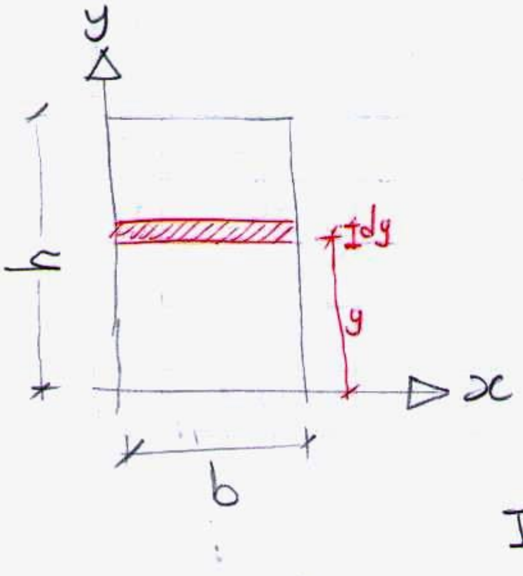
که بدین ترتیب برای محورهای مختصات خواهیم داشت:

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 m_i \qquad I_y=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 m_i$$

اگر دستگاه نقاط پیوسته باشد، بایست محیط را به تعدادی ناحیه تقسیم و برای هر کدام از ناحیه‌ها و افزایش تعداد تقسیمات به جواب برسیم که در آن صورت

$$I_x=\int_A y^2\,dm \qquad I_y=\int x^2\,dm$$

نکته ۱: برخلاف گشتاور استاتیک که صفر هم می‌توانند باشند گشتاور اینرسی همواره مثبت است. چراکه $(d_i)^2$ همواره مثبت است.



مثال: مطلوبست تعیین گشتاور اینرسی مستطیل نسبت به اضلاع آن

$$dm=b\cdot dy$$

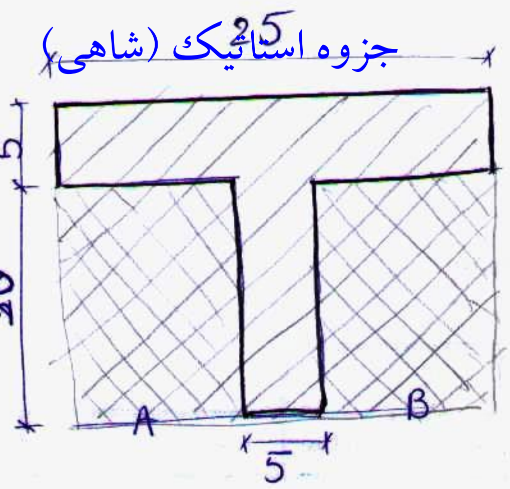
$$I_x=\int y^2\,dm=\int_0^h y^2\cdot b\cdot dy=b\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^h$$

$$I_x=b\left(\frac{h^3}{3}-\frac{0}{3}\right)=\frac{bh^3}{3}$$

به طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت

$$I_y=\frac{b^3h}{3}$$

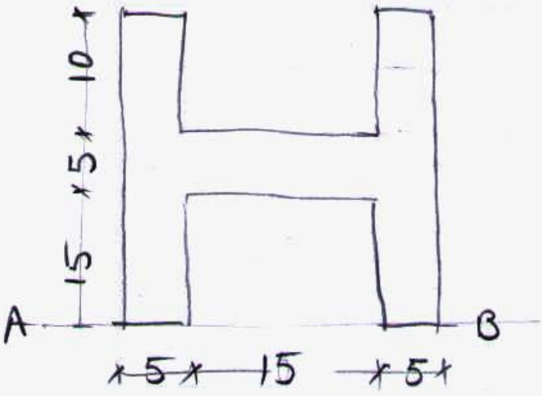
مثال: ممان اینرسی شکل مقابل نسبت به خط AB را بدست آورید.



$$I_{AB} = \frac{1}{3}\,25(30+5)^3 - 2\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{25-5}{2}\right)\times 30^3\right\}$$

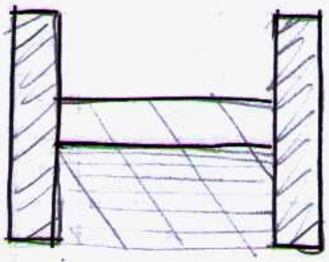
$$I_{AB} = 177'291.7 \ \text{cm}^4$$

مثال: ممان اینرسی شکل مقابل را نسبت به خط AB محاسبه کنید. (اندازه ها به cm است)

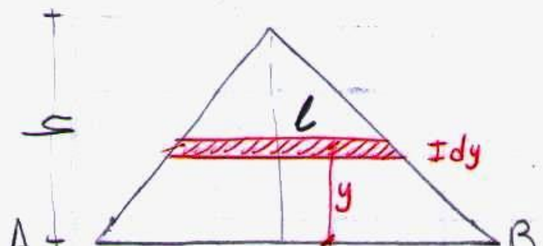


$$I_{AB} = 2\left\{\frac{5}{3}\times(30)^3\right\} + \frac{15}{3}\times(15+5)^3 - \frac{15}{3}\times 15^3$$

$$= 113'125 \ \text{cm}^4$$



مثال: لنگر ماند مثلث نسبت به قاعده اش را محاسبه کنید.



$$\frac{l}{b} = \frac{(h-y)}{h} \Rightarrow l = \frac{b}{h}(h-y)$$

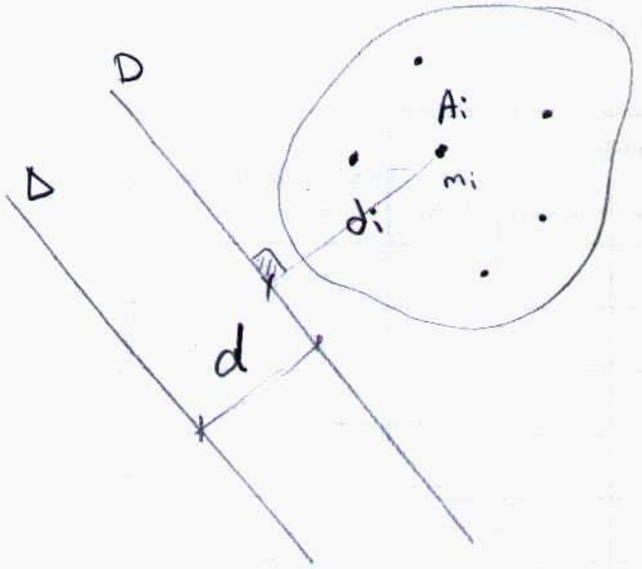
$$dm = l \cdot dy = \frac{b}{h}(h-y)dy$$

$$I_{AB} = \int_0^h y^2 dm = \int_0^h y^2\left\{\frac{b}{h}(h-y)dy\right\} = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)dy$$

$$I_{AB} = \frac{b}{h}\left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\Big|_0^h\right) = \frac{b}{h}\left\{\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right\} = \frac{b}{h}\cdot\frac{4h^4 - 3h^4}{12} = \frac{b\,h^4}{12h}$$

$$I_{AB} = \frac{bh^3}{12}$$

گشتاور اینرسی نسبت به دو خط موازی: (قضیه محورهای موازی)



اگر ممان اینرسی دستگاه نقاط اسکالر دار را نسبت به خط D داشته باشیم آیا می‌توان ممان اینرسی نسبت به خط Δ که موازی خط D است را بدست آورد؟

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (d_i + d)^2 m_i$$

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (d_i^2 + 2dd_i + d^2) m_i$$

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 + 2d \sum_{i=1}^{n} d_i m_i + d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

رابطه کلی

$$\boxed{I_\Delta = I_D + 2d\, S_D + d^2 M}$$

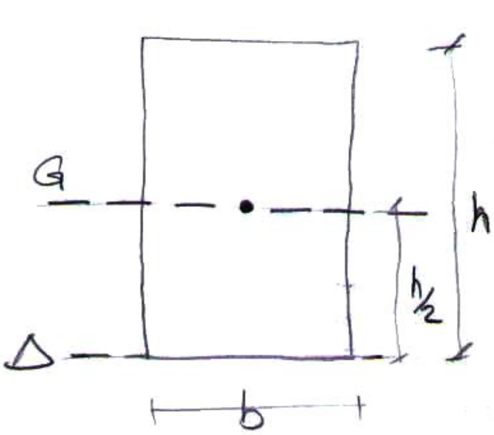
اگر خط D از مرکز دستگاه نقاط اسکالردار عبور کند، S_D برابر صفر خواهد بود و d فاصله مرکز دستگاه تا خط D و داریم.

$$\boxed{I_\Delta = I_G + d^2 \cdot M}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید رابطه فوق حالت خاص از رابطه کلی است و تنها در صورتی صحیح است که خط از مرکز دستگاه نقاط عبور کند.

نکته: گشتاور مرکزی در هر امتداد حداقل مقدار ممان اینرسی نسبت به خطوط موازی آن است.

مثال: مطلوبست محاسبه ممان اینرسی مستطیل نسبت به خطی که از مرکز آن عبور کرده و با قاعده‌اش موازی است.

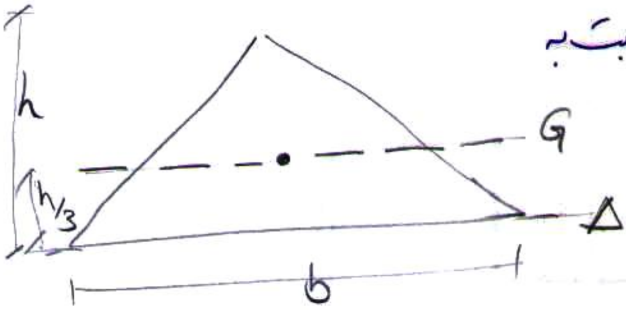


$$I_\Delta = I_G + d^2 \cdot M$$

$$\frac{bh^3}{3} = I_G + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (bh)$$

$$I_G = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{4bh^3 - 3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

مثال: مطلوبست محاسبه ممان اینرسی مثلث نسبت به خطی که از مرکز آن گذشته و موازی قاعده آن باشد.

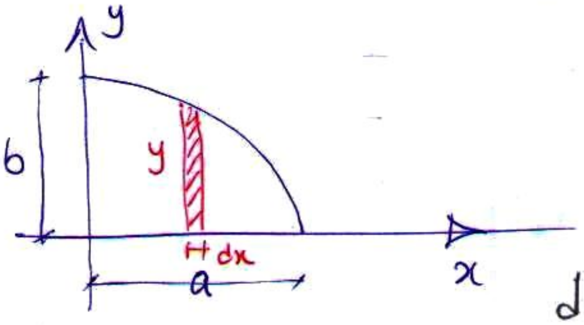


$$I_\Delta = I_G + d^2 M$$

$$\frac{bh^3}{12} = I_G + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2}$$

$$I_G = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{3bh^3 - 2bh^3}{36} = \frac{bh^3}{36}$$

مثال: ممان اینرسی بیضی به قطر 2a و 2b را نسبت به اقطار آن محاسبه و از روی آن ممان اینرسی دایره را بدست آورید.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ، \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad dx = -a\sin\theta\, d\theta$$

$$dI_x = \frac{1}{3} dx \cdot y^3 = \frac{1}{3}(-a\sin\theta\, d\theta)(b\sin\theta)^3$$

$$dI_x = \frac{-ab^3}{3} \sin^4\theta\, d\theta$$

$$I_x = \int dI_x = -\frac{ab^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\theta\, d\theta$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\int \sin^4\theta \, d\theta = \int (\sin^2\theta)^2 d\theta = \int^{0} \left[\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]^2 d\theta = \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \left\{1 - 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right\} d\theta = \tfrac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{ \tfrac{3}{2}\theta - \sin 2\theta + \tfrac{1}{8}\sin 4\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \right\} = \tfrac{1}{4}\left\{-\tfrac{3}{2}\times\tfrac{\pi}{2} + 0 - 0\right\} = -\tfrac{3\pi}{16}$$

$$I_x = -\frac{ab^3}{3} \times \left(-\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi a b^3}{16}$$ برای $\frac{1}{4}$ بیضی

$$I_x = 4(I_x) = \frac{\pi a b^3}{4}$$ برای بیضی

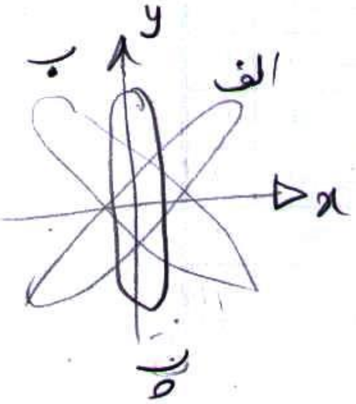
برای دایره $a=b$ ←

$$I_x = \frac{\pi a^4}{4}$$

ممان اینرسی گریز از مرکز:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

در مطالعه حرکت اجسام فاصله آن از دو محور لازم می‌شود که کمیتی به نام ممان اینرسی گریز از مرکز که از حاصل ضرب فاصله نقاط نسبت به دو محور و اسکالر آن تعریف می‌شود و در اصل نحوه پراکندگی نقاط نسبت به محورهای مختصات را نشان می‌دهد

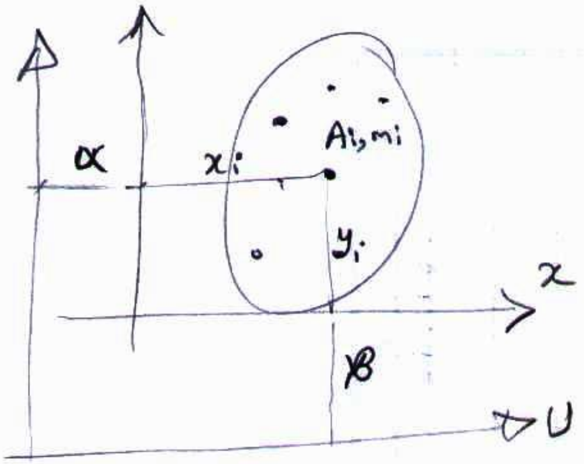


الف- اگر نقاط (شکل) در امتداد ربع اول و سوم باشد مثبت

ب- « « « دوم و چهارم باشد منفی

ج- اگر نسبت به یکی محور تقارن داشته باشد صفر

انتقال محورها در حالت اینرسی گریز از مرکز



$$I_{UV} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i + \alpha)(y_i + \beta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i y_i + x_i \beta + y_i \alpha + \alpha \beta)$$

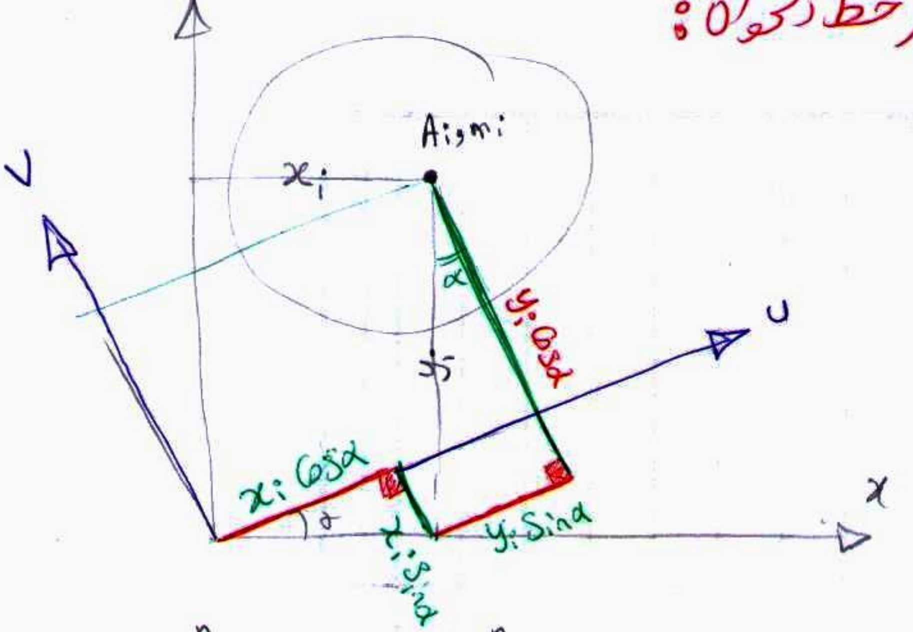
$$I_{UV} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i + \beta \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} m_i y_i + \alpha \beta \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\boxed{I_{UV} = I_{xy} + \beta S_y + \alpha S_x + \alpha \beta M}$$ فرمول کلی

اگر مبدا مختصات x و y بر G (مرکز) دستگاه منطبق باشد، S_x و S_y مساوی صفر و α و β به ترتیب x_G و y_G خواهند بود داریم.

$$\boxed{I_{UV} = I_{xy} + x_G y_G M}$$

ممان اینرسی نسبت به هر خط دلخواه :
(دوران محورها)



$$u_i = x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha$$
$$v_i = -x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha$$

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 m_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha\right)^2 m_i =$$

$$\sum m_i \left(x_i^2 \sin^2\alpha - 2 x_i y_i \sin\alpha \cos\alpha + y_i^2 \cos^2\alpha \right) =$$

$$= \sin^2\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i - 2 \sin\alpha \cos\alpha \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i + \cos^2\alpha \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

$$I_u = I_y \sin^2\alpha - 2 I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_x \cos^2\alpha$$
$$= \frac{I_y}{2}(1-\cos 2\alpha) - I_{xy} \sin 2\alpha + \frac{I_x}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \end{cases}$$
$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

برای I_v می‌توان $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ انتخاب نمود

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(\pi + 2\alpha) - I_{xy} \sin(\pi + 2\alpha)$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha)(-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(-x_i^2 \sin\alpha \cos\alpha + x_i y_i \cos^2\alpha - x_i y_i \sin^2\alpha + y_i^2 \sin\alpha \cos\alpha \right)$$

$$= \sin\alpha \cos\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \right) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

$$I_{uv} = \frac{\sin 2\alpha}{2} (I_x - I_y) + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \right) I_{xy}$$

$$\boxed{I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \, I_{xy}}$$

محورهای اصلی لنیزسی:

با تغییر زاویه میزان ممان اینرسی I_u تغییر می‌کند و بنابراین می‌توان زوایایی که به ازای آن I_u حداکثر و حداقل می‌شود را یافت.

$$\frac{dI_u}{d\alpha}=0 \Rightarrow \frac{I_x-I_y}{2}(-2)\sin 2\alpha - I_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

$$-(I_x-I_y)\sin 2\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

طرفین را $\cos 2\alpha$ تقسیم

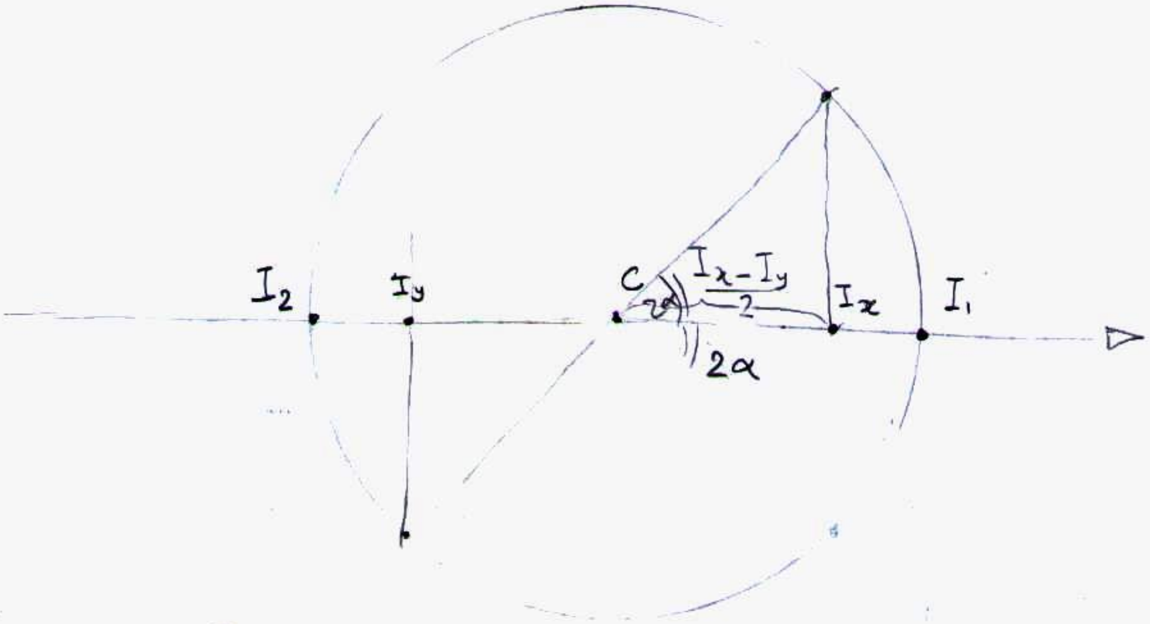
$$(I_x-I_y)\, tg 2\alpha = 2I_{xy}$$

$$\boxed{tg\, 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}}$$

$$2\alpha = k\pi + tg^{-1}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}\right)$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}\, tg^{-1}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}\right)$$

دایره مور

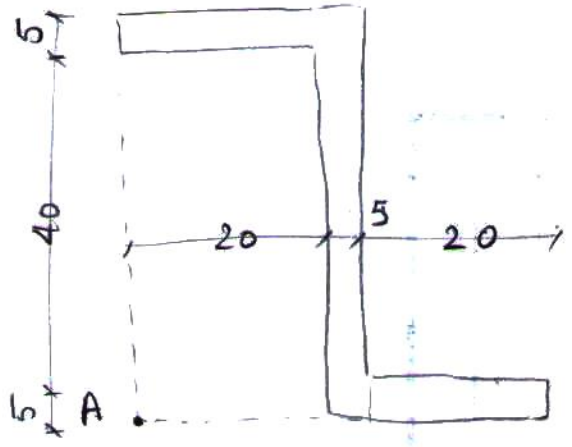


$$tg2\alpha = -\frac{I_{xy}}{\frac{I_x-I_y}{2}} = -\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}$$

$$I_1 = C + R = \frac{I_x+I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_1 = C - R = \frac{I_x+I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه ممان اینرسی محصول نسبت به محور x و y گذرنده از نقطه A و تعیین زاویه محورهای اصلی نسبت به محور x ها



$$I_x = \frac{25 \times 50^3}{3} - \frac{20 \times 45^3}{3} + \frac{20 \times 5^3}{3} = 435'000 \ cm^4$$

$$I_y = \frac{45 \times 25^3}{3} - \frac{40 \times 20^3}{3} + \frac{5 \times 45^3}{3} = 279'583 \ cm^4$$

$$I_{xy} = 45 \times 50 \left(\frac{45}{2} \times \frac{50}{2} \right) - 20 \times 45 \left(\frac{20}{2} \times \frac{45}{2} \right) - 20 \times 45 \left(\frac{20}{2} + 25 \right) \left(\frac{45}{2} + 5 \right)$$

$$= 253'125 \ cm^4$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2} tg^{-1} \left(- \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \right)$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2} tg^{-1} \left(- \frac{2 \times 253'125}{435'000 - 279'583} \right) = \frac{k\pi}{2} + (-36.47^\circ)$$

$$\alpha = \begin{cases} k=0 & -36.47^\circ \\ k=1 & 53.53 \end{cases}$$

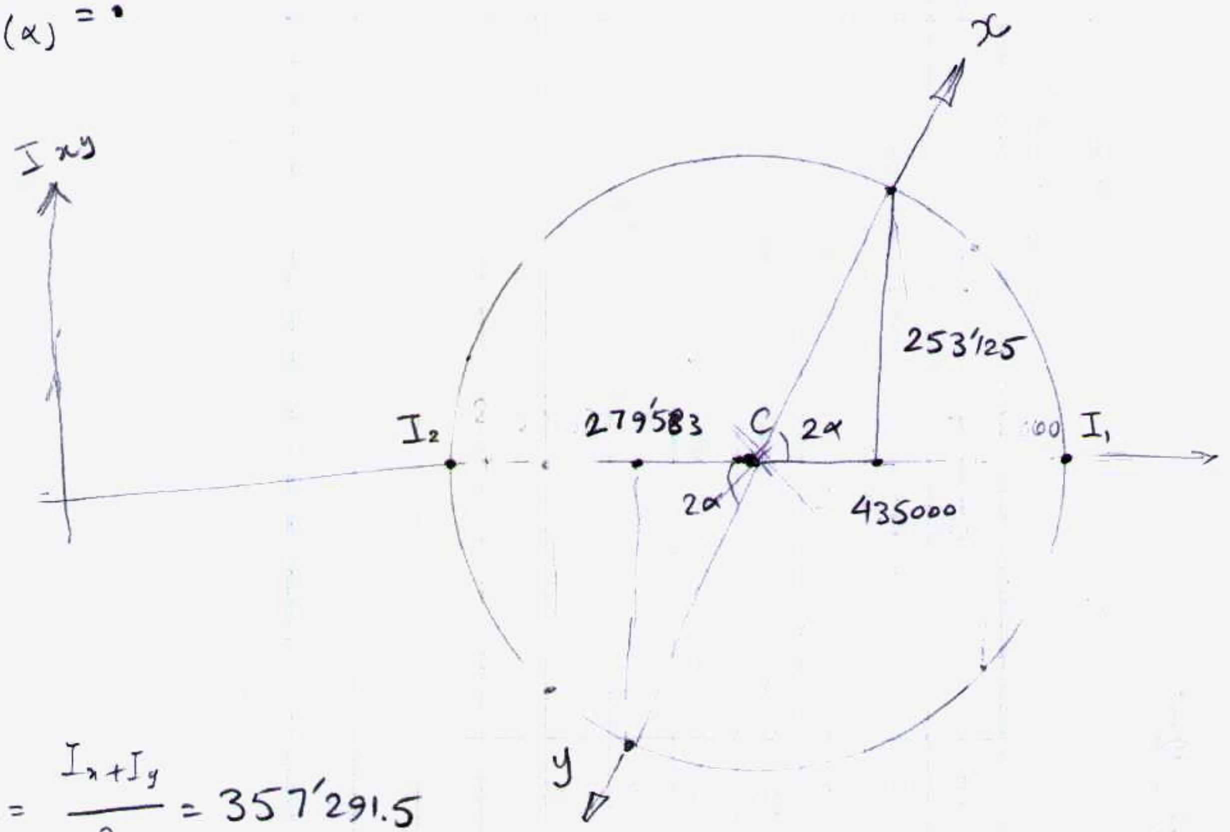
$$I_\alpha = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{-36.47} = \frac{435'000 + 279'583}{2} + \frac{435'000 - 279'583}{2} \cos(-72.94)$$

$$- 253'125 \sin(-72.94^\circ) = 622'076.1 \ cm^4$$

$$I_{\alpha=53.53} = 92'506.9 \quad cm^4$$

$$I_{xy(\alpha)} = 0$$



$$C = \frac{I_x + I_y}{2} = 357'291.5$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \sqrt{\left(\frac{435000 - 279'583}{2}\right)^2 + (253'125)^2} = 264'784.6$$

$$I_1 = C + R = 357'291.5 + 264'784.6 = 622'076.1 \quad cm^4$$

$$I_2 = C - R = 357'291.5 - 264'784.6 = 92'506.9 \quad cm^4$$